5.6. Wellenausbreitung in Materie

Annahme: homogenes, isotropes, lineares Medium mit skalaren Materialparameter ε, μ, σ

$$\underline{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \underline{E} \qquad (\varepsilon_r > 1)$$
$$\underline{B} = \mu_0 \mu_r \underline{H} \qquad (\text{i.a. } \mu_r \approx 1)$$
$$\underline{j} = \sigma \underline{E} \qquad \text{Ohm'sches Gesetz}$$

5.6.1. Ausbreitung ohne Dispersion

d.h. ε, μ, σ unabhängig von ω

sei $\rho = 0$ (keine freien Ladungen)

① $\nabla \times \underline{E} + \dot{\underline{B}} = 0$

② $\nabla \times \underline{B} - \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r \dot{\underline{E}} = \mu_0 \mu_r \underline{j} = \mu_0 \mu_r \sigma \underline{E}$

$$\Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \underline{E}) \overset{①}{=} \nabla(\nabla \cdot \underline{E}) - \Delta \underline{E} = -\nabla \times \dot{\underline{B}}$$
$$\overset{②}{=} -\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r \ddot{\underline{E}} - \mu_0 \mu_r \sigma \dot{\underline{E}}$$

$$\boxed{\Delta \underline{E} - \frac{1}{c_M^2}\left(\ddot{\underline{E}} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \dot{\underline{E}}\right) = 0}$$

Vakuum Lichtgeschw.

gedämpfte Wellengleichung mit $c_M := \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}$

1-dim: Telegraphengleichung, beschreibt Drahtwellenausbreitung

Harmon. ebene Welle (spezielle Lösung)

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = \underline{E}_0 \, e^{i(\underline{k}\underline{r} - \omega t)}$$

$$\rightarrow k^2 = \varepsilon_r \mu_r \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + i \frac{1}{\omega \tau}\right) \quad (*) \qquad \text{mit } \tau := \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{\sigma}$$

dielektrische Relaxationszeit

Wellenvektor $k \in \mathbb{C}$ wegen Dämpfungsterm

Setze: $\boxed{k = \frac{\omega}{c} \tilde{n}} = \frac{\omega}{c}(n + i\varkappa)$ mit komplexem Brechungsindex $\tilde{n} = n + i\varkappa$

$$\rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(n^2 - \varkappa^2 + 2in\varkappa) \overset{(*)}{=} \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r \mu_r \left(1 + \frac{i}{\omega \tau}\right)$$

$$\Rightarrow n\varkappa = \frac{\varepsilon_r \mu_r}{2\omega\tau}$$
$$n^2 - \varkappa^2 = \varepsilon_r \mu_r$$

2 Gleichungen zur Bestimmung von $n, \varkappa$

Beispiel: Welle mit $\underline{k} \parallel x_3$, lineare Polarisation

$$\underline{E}(x_3,t) = \underline{E}_0\, e^{i(\underline{k}\underline{r} - \omega t)}$$
$$= \underline{E}_0 \underbrace{e^{-\frac{x_3}{d}}}_{\text{Dämpfung}} \underbrace{e^{-i\omega(t - \frac{n}{c}x_3)}}_{\text{Oszillation}}$$

Extinktionskoeffizient: $d := \frac{c}{\omega\mu}$

Phasengeschwindigkeit $\frac{c}{n}$

$\underline{E}_0 \parallel x_1 \quad \rightarrow \quad \underline{B}_0 \parallel x_2$

$$(\nabla \times E)_2 = \frac{\partial E_1}{\partial x_3} = -\dot{B}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad i\frac{\omega}{c}(n + i\mu)\, E_1 = i\omega B_2$$

$$B_2 = \frac{n + i\mu}{c} E_1 = \frac{\sqrt{n^2+\mu^2}}{c}\, e^{i\varphi} E_1$$

Phasenverschiebung zwischen E und B-Feld

Isolator $\sigma = 0$

$\rightarrow \mu = 0,\ \tau \rightarrow \infty \quad \rightarrow \varphi = 0 \qquad \underline{E}, \underline{B}$ in Phase

reellen Brechungsindex $\quad n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \propto \sqrt{\varepsilon_r} > 1$

Phasengeschwindigkeit $\frac{c}{n} < c$

Metall σ groß

$\rightarrow \tau = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{\sigma} \ll \frac{1}{\omega}$ (für alle Frequenzen bis ins UV)

$$\rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\underline{n^2 - \mu^2} + 2i\underline{n\mu}\right)$$
$$\approx \frac{\omega^2}{c^2}\, \underline{\varepsilon_r \mu_r \frac{i}{\omega\tau}} \qquad \text{(rein imaginär)}$$

$\rightarrow n^2 - \mu^2 \approx 0$

$\rightarrow n\mu \approx n^2 \approx \mu^2 \approx \frac{\varepsilon_r \mu_r}{2\omega\tau}$

$\hookrightarrow n = \mu = \sqrt{\frac{\varepsilon_r \mu_r}{2\omega\tau}}$

$\left(\tan\varphi = \frac{\mu}{n} \approx 1 \quad \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}\right)$

Extinktionskoeff.: $d = \frac{c}{\omega\mu} \sim$ cm für 100Hz

- hochfrequente Wellen dringen nicht tief ins Metall ein.

  Grund: Verschiebungsstrom $\quad$ Leitungsstrom
  $\dot{D} \sim \omega E \ll \sigma E$

NB: nur ohne Dispersion ist ε_r reell.

5.6.2. Wellenausbreitung mit Dispersion

(Annahme $\mu_r \approx 1$)

$$\hat{\underline{P}}(\omega) = \varepsilon_0\, \hat{\chi}(\omega)\, \underline{E}(\omega) \qquad \text{zeitliche Dispersion}$$

$$\text{mit } \hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \chi(t)\, e^{i\omega t} \quad ; \quad P(\underline{r},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \hat{P}(r,\omega)\, e^{-i\omega t}$$

$$\underline{E}(\underline{r},\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, \underline{E}(\underline{r},t')\, e^{i\omega t'}$$

$$\Rightarrow \underline{P}(\underline{r},t) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \varepsilon_0 \hat{\chi}(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, \underline{e^{i\omega(t'-t)}}\, \underline{E}(\underline{r},t')$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} dt'\, \underline{\chi(t-t')}\, \underline{E}(\underline{r},t')$$ Faltungsintegral

NB: Kausalität verlangt $\chi(t-t')=0$ für $t'>t$.

- aus mikroskopischen Modellen folgt i.a. komplexes $\hat{\chi}(\omega) \in \mathbb{C}$ (z.B. Lorentzkurve) (Lineare Antwort)

→ komplexe dielektrische Funktion

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \hat{\chi}(\omega) = \varepsilon_r'(\omega) + i\,\varepsilon_r''(\omega) \qquad \text{mit } \varepsilon_r', \varepsilon_r'' \in \mathbb{R}$$

aus $\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} dt\, \chi(t)\, e^{i\omega t}$ folgt $\varepsilon_r^*(\omega) = \varepsilon_r(-\omega)$

$$\rightarrow \quad \varepsilon_r'(\omega) = \varepsilon_r'(-\omega), \qquad \varepsilon_r''(\omega) = \varepsilon_r''(-\omega)$$

monochromatische ebene Welle $\underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}_0\, e^{i(\underline{k}\underline{r}-\omega t)}$ als Lösung der Telegrafengleichung mit:

$$\boxed{k^2 = \varepsilon_r(\omega)\,\frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + i\frac{1}{\omega\tau}\right)}$$

Dispersionsrelation mit frequenzabh. $\varepsilon_r(\omega)$.

$\varepsilon_r(\omega) \in \mathbb{C}$

Isolator: $(\sigma = 0)$ → $k^2 = \varepsilon_r(\omega)\frac{\omega^2}{c^2}$

$$\tilde{n}(\omega)^2 = \varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_r'(\omega) + i\,\varepsilon_r''(\omega)$$ komplexer Brechungsindex. $\tilde{n} = n + i\mu$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r'(\omega) &= n^2 - \mu^2 \\ \varepsilon_r''(\omega) &= 2n\mu \end{aligned}\right\} \quad n^2 = \pm\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_r'}{2}\right)^2 + \frac{\varepsilon_r''^2}{4}} + 2\varepsilon_r'$$

(i) Absorption

a) $\varepsilon_r'' = 0$ → $\mu = 0$, $n = \sqrt{\varepsilon_r'}$ ungedämpfte Welle falls $\varepsilon_r' > 0$

b) $\varepsilon_r'' > 0$ → $\mu > 0$ gedämpfte Welle Energiedissipation

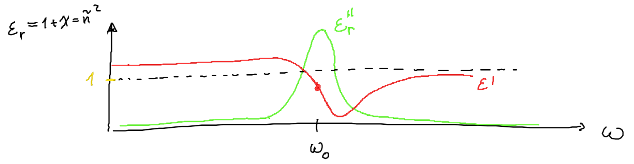
(ii) Dispersion

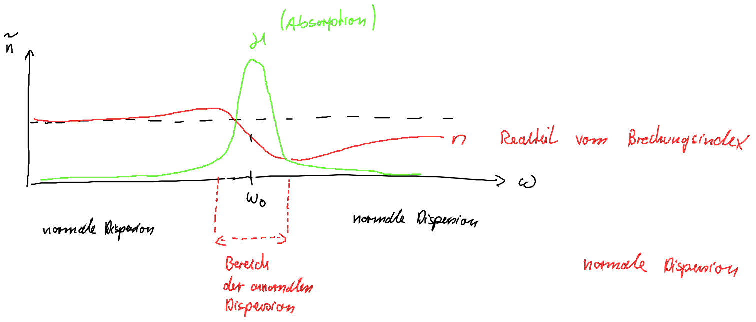
$\mathrm{Re}\,k = \frac{\omega}{c}\, n(\omega)$ nichtlineare Dispersion

Gruppengeschwindigkeit $$v_g := \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}} = \frac{c}{\frac{d(\omega \cdot n(\omega))}{d\omega}} = \frac{c}{n + \omega\frac{dn}{d\omega}} \neq \frac{c}{n(\omega)} = v_{ph}$$

Gruppengeschw. ≠ Phasengeschw.

Typische Frequenzabhängigkeit (Resonanzverhalten)





normale Dispersion $\frac{dn}{d\omega} > 0$

anomale Dispersion $\frac{dn}{d\omega} < 0$

Beziehung zwischen $\varepsilon'(\omega)$ und $\varepsilon''(\omega)$?

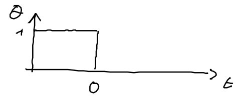
Kramers – Kronig Relation

- Allgemein gültiger Zusammenhang zwischen Dispersion $n(\omega)$ und Absorption $\mu(\omega)$ erlaubt z.B. Berechnung der Dispersionsbeziehung aus dem Absorptionsspektrum und umgekehrt!
- Folgt aus der Kausalität

d.h. $\chi(t) = \Theta(t)\,\chi(t)$

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t > 0 \\ 1 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

Heaviside – Fkt.



Fourier von Θ $\int_0^\infty e^{-i\omega t}\,dt$

Frohe Weihnachten!