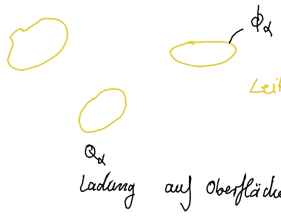
1.8. Kapazitätskoeffizienten und Feldenergie

Randwertaufgabe:



$\alpha = 1 \dots n$

2. Grundaufgabe: geg: Ladungen Q_α
ges: Potenzial im Außenraum $\phi(\underline{r})$
ϕ_α auf Oberfläche

- Kapazitätskoeffizienten $\underline{\underline{C}}$, $C_{\alpha\beta}$

$$Q_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} C_{\alpha\beta}\, \phi_\beta$$

- $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$ aus Symmetrie $G(\underline{r}-\underline{r}') = G(\underline{r}'-\underline{r})$

Beweis über Green'schen Satz
$\psi = G(\underline{r}-\underline{r}')$
$\varphi = G(\underline{r}'-\underline{r})$

- Einheit: $1\,F = 1\,\frac{C}{V} = 1$ Farad (Faraday 1791–1867)

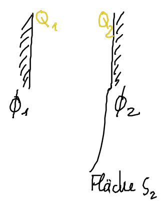
- pos. definit

Bsp.: • Betrachte speziell einen Leiter ϕ_L

$$C = \frac{Q}{\phi_L}$$

Kapazität eines Leiters

• Plattenkondensator



$Q_2 = -Q_1$

Spannung $U = \phi_1 - \phi_2$

$$Q_1 = C_{11}\,\phi_1 + C_{12}\,\phi_2$$
$$-Q_1 = C_{21}\,\phi_2 + C_{22}\,\phi_1$$

$C_{12} = C_{21} = C'$

$$Q_1 = C \cdot U \qquad C = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}}$$

▷ Da $\underline{\underline{C}}$ symmetrisch ist sie invertierbar

$$\rightarrow \quad \phi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} C^{-1}_{\alpha\beta}\, Q_\beta$$

→ 1. Grundaufgabe kann in 2. Grundaufgabe überführt werden. falls $G(\underline{r}-\underline{r}')$ bekannt ist oder konstruiert wurde.

Feldenergie im Bereich mit Leitern

Energie des Feldes im Außenraum

ohne Ladungen im Außenraum $\rho(\underline{r})=0$

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\,\left(E(r)\right)^2$$

Im Prinzip bekannt wenn $\phi(r)$ bekannt.

Betrachte differentielle Änderungen der Randbedingungen auf S_α

Q_α

$$Q_\alpha \rightarrow Q_\alpha + \delta Q_\alpha$$
$$\phi_\alpha \rightarrow \phi_\alpha + \delta\phi_\alpha$$

Lösung $\quad \phi(\underline{r}) \rightarrow \phi(\underline{r}) + \delta\phi(\underline{r})$

$$\delta W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\; 2\underline{E}(r)\,\delta\underline{E}(r)$$

Bem: Räumliche Anordnung ist unverändert
→ Vertauschung von ∇ und δ

d.h. $\triangle\phi(r) = 0 \longrightarrow \triangle\delta\phi(r) = 0$ in V

$\underline{E}(\underline{r}) = -\nabla\phi(\underline{r}) \longrightarrow \delta\underline{E}(\underline{r}) = -\nabla\delta\phi(\underline{r})$

$$= -\varepsilon_0\int_V d^3r\, \underbrace{\nabla\phi(\underline{r})\,\delta\underline{E}(\underline{r})}_{\nabla(\phi\cdot\delta\underline{E}) - \phi\,\nabla\delta\underline{E}}$$

$\nabla\delta\underline{E} = \delta\underbrace{\nabla\underline{E}}_{0} = 0$

0, keine Ladungen im Außenraum falls

$$\delta W = -\varepsilon_0\int_V d^3r\,\nabla(\phi\,\delta\underline{E})$$

$$\overset{\text{Gauß}}{=} \varepsilon_0\sum_\alpha \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\phi(\underline{r})\,\delta\underline{E}(\underline{r})$$

$$= \varepsilon_0\sum_\alpha \phi_\alpha \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\,\delta\underline{E}(\underline{r})$$

$$= \sum_\alpha \phi_\alpha\,\delta Q_\alpha \qquad\qquad Q_\alpha = \sum_\beta C_{\alpha\beta}\,\phi_\beta$$

$$= \underbrace{\sum_{\alpha,\beta} \phi_\alpha C_{\alpha\beta} \delta\phi_\beta}_{1}$$

Trick : $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}\, \phi_\alpha \delta\phi_\beta + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} \underbrace{C_{\beta\alpha}}_{C_{\alpha\beta}} \phi_\beta \delta\phi_\alpha$$

$$\delta W = \delta\left\{ \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}\, \phi_\alpha \phi_\beta \right\}$$

$$\rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} \phi_\alpha C_{\alpha\beta} \phi_\beta}$$

Feldenergie im Außenraum

$$(\phi_1 \dots \phi_n)\, \underline{\underline{C}} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}$$

d.h. $\underline{\underline{C}}$ muss pos. definit sein damit Feldenergie pos. ist

2. Stationäre Ströme und Magnetfeld

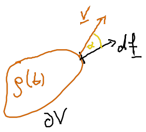
2.1. Kontinuitätsgleichung

Bewegte Ladungen $\rightarrow$ elektrischer Strom I

Erfahrung : $Q(t) = \int_V d^3r\, \rho(\underline{r}, t)$ $\rightarrow$ globaler Erhaltungssatz

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V d^3r\, \rho(\underline{r},t) = -\oint_{\partial V} \delta I \qquad (*_1)$$

"Ladungsänderung" "herausfließender Strom"



$$\Rightarrow \delta I = \frac{\rho\, dV}{dt} = \frac{\rho \overbrace{|\underline{v}|\, dt}^{\overset{\text{"Höhe"}}{ds}} \overbrace{|d\underline{f}| \cos\alpha}^{\text{"Grundfläche"}}}{dt} = \underbrace{\rho\, \underline{v}}_{\underline{j}(\underline{r},t)} d\underline{f}$$

Elektrische Stromdichte

$$\underline{j}(\underline{r},t) := \rho(\underline{r},t)\, \underline{v}(\underline{r},t)$$

Ladung, die durch $d\underline{f}$ pro Zeit aus V herausströmt

lokale Größe

mit $(*_1)$

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3r\, \rho(\underline{r},t) = -\oint_{\partial V} \overbrace{d\underline{f}\cdot\underline{j}}^{\delta I} \overset{\text{Gauß}}{=} -\int_V d^3r\, \operatorname{div} \underline{j}(\underline{r},t) \quad \text{für alle } V$$

Fluss durch die Oberfläche

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{r},t) + \mathrm{div}\,\underline{j}(\underline{r},t) = 0}$$

Kontinuitätsgleichung

lokale Erhaltungsgröße

speziell : stationäre Ladungsverteilung $\frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{r},t)=0$

$\mathrm{div}\,\underline{j}=0$ nicht notwendig $\underline{j}=0$

2.2. Magnetische Induktion

Exp. Erfahrung :

WW zwischen bewegten Ladungen : Kraft auf Ladung q, die sich bewegt mit $\underline{v}$

Lorentz - Kraft $\underline{F} = q\,\underline{v} \times \underline{B}(\underline{r})$

magnetische Induktion am Ort $\underline{r}$

$$\boxed{\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3r'\,\underline{j}(\underline{r}') \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}}$$

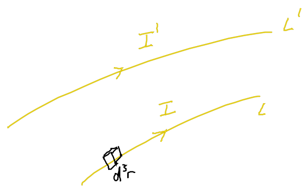
Ampère Gesetz

Einheit (SI) : $[B] = 1\frac{Ns}{Cm} = 1\frac{kg\,m^2 s}{Cs^2m^2} = 1T$ "Tesla"

damit ist $\mu_0 = 1{,}26\cdot 10^{-6}\,\frac{Vs}{Am}$ festgelegt (nicht frei wählbar wie ε_0)

- Die magn. Induktion beschreibt keine neue WW
  (betrachte Transformation ins bewegte Koordinatensystem)
  "Ruhesystem der Ladung"

Kraft zwischen 2 stromdurchflossenen Leitern



2 dünne Leiter L, L' mit zeitlich konstanten Strömen

Strom durch L' : $\underline{j}\,d^3r' = \rho\,\underline{v}'\,d^3r' = \rho\,\underbrace{\frac{d^3r'}{dt}}_{I'}\,d\underline{r}'$

"Ladung pro Zeit"

$\rightarrow$ magn. Induktion $\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}I'\int_{L'} d\underline{r} \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$

Kraft auf Ladung im Volumenelement d^3r von L: $\quad d\underline{F} = \rho \underline{v} \times \underline{B}\, d^3r$

$$= \underline{j} \times \underline{B}\, d^3r = I\, d\underline{r} \times \underline{B}$$

$$\boxed{\underline{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I I' \int_L d\underline{r} \times \int_{L'} d\underline{r}' \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}}$$

Kraft von L' auf L

" $a \times (b \times c) = b(ac) - c(ab)$ "

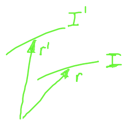
- mit $d\underline{r} \times (d\underline{r}' \times (\underline{r}-\underline{r}')) = (d\underline{r}\,(\underline{r}-\underline{r}'))\, d\underline{r}' - (d\underline{r}\, d\underline{r}')\,(\underline{r}-\underline{r}')$

und $\displaystyle\int_L d\underline{r}\, \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} = \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\Bigg|_{L\text{-Anfang}}^{L\text{-Ende}} = 0$ für L in ∞ oder geschl. Leiter

$$\underline{F} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I I' \iint_{L L'} (d\underline{r}\, d\underline{r}')\, \frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|r-r'|^3}$$

für parallele Ströme : $I d\underline{r}\, I' d\underline{r}' > 0$ -> Anziehung

" antiparallele " < 0 -> Abstoßung



$\underline{F} \to -\underline{F}$ $\quad$ actio = reactio