4.1.1. Polarisation

Betrachte el. magn. Welle

$$\underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}_0 \, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$$

$$\underline{B}(\underline{r},t) = \underline{B}_0 \, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$$

Allgemein

$\rightarrow \underline{E}$ heißt <u>transversal</u>, falls $\nabla \cdot \underline{E} = 0$ (Quellenfrei)

$$\rightarrow i\underline{k}\cdot\underline{E} = 0 \Rightarrow \underline{E} \perp \underline{k}$$

$\underline{E}$ heißt <u>longitudinal</u>, falls $\nabla \times \underline{E} = 0$ (wirbel-frei)

$$\rightarrow i\underline{k} \times \underline{E} = 0$$

$$\hookrightarrow \underline{E} \parallel \underline{k}$$

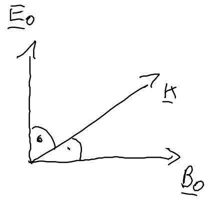
für $\rho = 0$ ist wegen $\nabla \cdot \underline{E} = 0$ $\quad \underline{E}(\underline{r},t)$ transversal

$\nabla \cdot \underline{B} = 0$ $\quad \underline{B}(\underline{r},t)$ transversal.

Weiter folgt aus $\nabla \times \underline{E} + \dot{\underline{B}} = 0$

$$\hookrightarrow \left(i\underline{k} \times \underline{E}_0 - i\omega \underline{B}_0\right) e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{B}_0 = \frac{1}{c}\, \underline{n} \times \underline{E}_0, \quad \omega = ck, \quad \underline{n} = \frac{\underline{k}}{|\underline{k}|}$$



$\underline{k}, \underline{E}_0, \underline{B}_0$ bilden ein Rechtssystem

Die Richtung von $\mathrm{Re}\{\underline{E}_0, \underline{B}_0\}$ legt Polarisation fest

Sei $\underline{k} \parallel \underline{e}_3$ - Achse $\rightarrow \underline{E}_0 = E_{0,1}\, \underline{e}_1 + E_{0,2}\, \underline{e}_2$

mit $E_{0,i} = a_i\, e^{i\delta_i} \in \mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix} a_i, \delta_i \in \mathbb{R} \\ i = 1,2 \end{pmatrix}$$

Physikalisches Feld:

$$E_1(r,t) = \mathrm{Re}\left\{ a_1 \, e^{i\{\delta_1 + \underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t\}} \right\}$$

$$= a_1 \cos(\delta_1 + \underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)$$

analog $E_2 = a_2 \cos(\delta_2 + \underbrace{\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t}_{\varphi})$

Aus $\frac{E_1}{a_1} = \cos(\varphi)\cos(\delta_1) - \sin\varphi \sin(\delta_1)$ (Additions-Theoreme)

$$\frac{E_2}{a_2} = \cos(\varphi)\cos(\delta_2) - \sin(\varphi)\sin(\delta_2)$$

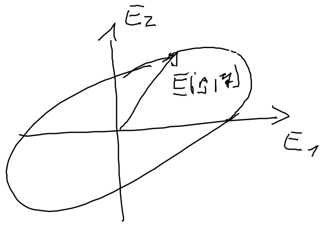
lässt sich $\varphi = \underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t$ eliminieren

$$\frac{E_1}{a_1}\sin\delta_2 - \frac{E_2}{a_2}\sin\delta_1 = \cos\varphi \sin(\overbrace{\delta_2 - \delta_1}^{=:\delta}) \qquad (1)$$

$$\frac{E_1}{a_1}\cos\delta_2 - \frac{E_2}{a_2}\cos\delta_1 = \sin\varphi \sin(\delta_2 - \delta_1) \qquad (2)$$

$$(1)^2 + (2)^2 \Longrightarrow \boxed{\left(\frac{E_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_2}{a_2}\right)^2 - 2\frac{E_1 E_2}{a_1 a_2}\cos\delta = \sin^2\delta} \quad \circledast$$

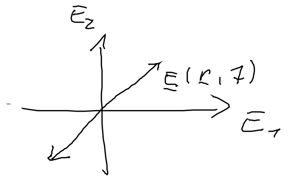
Ellipsengleichung für E_1, E_2



Der Feldvektor läuft als Funktion von φ auf einer Ellipse $\perp$ $\underline{k}$ um. (elliptische Polarisation)

Spezialfälle

(a) linear polarisierte Welle



$$\boxed{\delta_1 = \delta_2 + n \cdot \pi}$$

$\delta = \delta_2 - \delta_1$

$\sin\delta = 0$

$\cos\delta = \pm 1$

in (*) $\rightarrow$ $\frac{E_1}{a_1} \pm \frac{E_2}{a_2} = 0$

$\rightarrow \quad \underline{E}(r,t) = \underline{E}_0 \cos\varphi(r,t)$ mit $\underline{E}_0$ reell

(b) zirkular polarisierte Welle

in (*) $\rightarrow$ $E_1^2 + E_2^2 = a^2$

$a_1 = a_2 = a$

$\delta_1 = \delta_2 + (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\hookrightarrow \cos\delta = 0$

$\underline{E}$ läuft auf Kreis um

$$\underline{E}(r,t) = a \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \pm \sin\varphi \end{pmatrix}$$

links / rechts zirkular polarisiert

. $\underline{B}$ läuft dem $\underline{E}$-Vektor um $\frac{\pi}{2}$ in der Polarisationsebene verschoben nach.

Zusammenfassung:

Maxwellgl. im Vakuum

$\rightarrow \underline{E}, \underline{B}$ sind in Phase

$\rightarrow \underline{k}, \underline{E}_0, \underline{B}_0$ bilden ein Rechtssystem

$$\underline{E}_0(\underline{r},t) = \underline{E}_0 \cos(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)$$
$$\underline{B}_0(\underline{r},t) = \underline{B}_0 \cos(\underline{k}\cdot\underline{n} - \omega t)$$

4.1.2 Energiedichte der el. magn. Welle

Energiedichte
$$w = \frac{\varepsilon_0}{2}\underline{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\underline{B}^2$$
$$= 2\,\frac{\varepsilon_0}{2}\,\underline{E}_0^2$$
$$w = \varepsilon_0\,\underline{E}_0^2$$

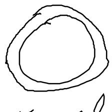
$$\boxed{\underline{B}_0 = \frac{1}{c}(\underline{n}\times\underline{E}_0)}$$

Energiestromdichte
(Poynting Vektor)
$$\underline{S} = \frac{1}{\mu_0}(\underline{E}\times\underline{B})$$
$$= \underbrace{\frac{1}{\mu_0 c}}_{=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}}\ \underbrace{\underline{E}\times(\underline{n}\times\underline{E})}_{\underline{E}^2\,\underline{n}}$$
$$= c\,\underbrace{\varepsilon_0\,\underline{E}^2}\cdot\underline{n}$$
$$\underline{S} = c\cdot w\cdot\underline{n}$$
$$\underline{n} = \frac{\underline{k}}{|\underline{k}|}$$

Die Energie wird mit Lichtgeschwindigkeit c
in Richtung $\underline{n} = \frac{\underline{k}}{|\underline{k}|}$ transportiert

Kugelwelle

$$\underline{E}(\underline{r},t) = \frac{1}{r}\,E_0\,e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}$$



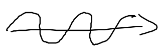
Kugelschale mit Radius r
Dicke dr

Energie in Kugelschale

$$W(r) = 4\pi r^2 dr \cdot \varepsilon_0 \overline{\underline{E}^2}$$

↑ Raum-zeitliche Mittel

$$= 4\pi r^2 dr\, \varepsilon_0 \frac{E_0^2}{r^2} \cdot \frac{1}{2}$$

E  $\Rightarrow$ E^2 

$$= \text{const} \quad (\forall \text{ Radien } r)$$

<u>Bisher</u>: Wellenausbreitung im Vakuum

<u>Jetzt</u>: Erzeugung durch zeitlich variierende Strom- und Ladungsverteilungen

4.2. Retardierte Potentiale

Aufgabe: Lösungen der inhomogenen Gleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} \Box \phi &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho \\ \Box \underline{A} &= -\mu_0 \underline{j} \end{aligned}} \qquad (\text{Lorentz-Eichung})$$

vorgegebene Quellen $\rho(\underline{r}, t)$, $\underline{j}(\underline{r}, t)$ und

Randbedingungen $\phi, \underline{A} \to 0$ für $r \to \infty$

<u>Methode</u>: Greensche Funktion $G(\underline{r} - \underline{r}', t - t')$

$$\boxed{\Box u(\underline{r},t) = -f(\underline{r},t)}$$

geg. f = Inhomogenität

$$= \begin{cases} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \mu_0 \cdot \underline{j} \end{cases}$$

ges $u = \begin{cases} \phi \\ \underline{A} \end{cases}$

$$\boxed{u(\underline{k},\omega) = \tilde{g} \cdot f(\underline{k},\omega)}$$

$$\Downarrow$$

Rücktrafo

$$\boxed{u(\underline{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \; g(\underline{r}-\underline{r}', t-t') \; f(\underline{r}', t')}$$

vergleiche in E-Statik:

$$\Delta \phi(r) = -\frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}$$

$$\downarrow$$

$$\tilde{\phi}(\underline{k}) = \tilde{g} \cdot \tilde{\rho} \quad , \quad \tilde{g} = \frac{1}{\varepsilon_0 k^2}$$

$$\phi(\underline{r}) = \int d^3r' \; g(\underline{r}-\underline{r}') \; \rho(\underline{r}')$$

mit $g(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$

mit

$$\Delta g = -\frac{\delta(\underline{r}-\underline{r}')}{\varepsilon_0}$$

- Kausalitätsbedingung:

$$g(\underline{r}-\underline{r}', t-t') \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{für}$$

$z' > z$