Wähle nun eine Eichung, so dass die inhomogenen Maxwell-Gl. besonders einfach werden:

Ziel: Entkopplung der DGL. für $\underline{A}$ und ϕ

(i) Lorentz-Eichung

$$\boxed{\nabla \cdot \underline{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \phi = 0} \quad (*)$$

dann gilt:

a) $-\nabla \cdot \underline{E} = \nabla \left(\nabla \phi + \frac{\partial}{\partial t} A \right) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho$

$$\Delta \phi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \underline{A} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

$$\overset{(*)}{\longrightarrow} \boxed{\Delta \phi - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho}$$

Wellengleichung

$$\boxed{\Box \phi = \frac{-1}{\varepsilon_0} \rho}$$

d'Alembert Operator

$$\Box := \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

b) $\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \underline{B} - \varepsilon_0 \dot{\underline{E}} = \dot{\underline{j}}$

$$\underbrace{\nabla \times (\nabla \times A)}_{\nabla(\nabla \underline{A}) - \Delta \underline{A}} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \phi + \frac{\partial}{\partial t} A \right) = \mu_0 \underline{j}$$

$$\Delta \underline{A} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{A} - \nabla \underbrace{\left(\nabla\cdot\underline{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\phi \right)}_{0 \text{ für Lorentz-Eichung}} = -\mu_0 \underline{j}$$

$$\boxed{\Box \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}}$$

$$\boxed{\Box \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho}$$

inhomogene Wellengleichung (entkoppelt!)

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 2.994 \times 10^{8} \frac{m}{s}$$

Lichtgeschwindigkeit (Ausbreitungsgeschw. el./magn. Wellen im Vakuum)

(ii) Coulomb-Eichung (Strahlungseichung)

$$\boxed{\nabla\cdot\underline{A} = 0}$$

Allgemein gilt: Zerlegung von $\underline{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}$

in Longitudinalfeld $\underline{E}_l := -\nabla\phi$ (wirbelfrei)

und Transversalfeld $\underline{E}_t := \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}$ (quellfrei)

tatsächlich gilt: $\nabla\times\underline{E}_l = 0$

$$\nabla\cdot\underline{E}_t = 0$$

$\underline{B}$ ist immer transversal: $\nabla\cdot\underline{B} = \nabla(\nabla\times\underline{A}) = 0$

Also: ϕ ergibt die longitudinalen, $\underline{A}$ die transversalen Felder

Zerlegung der Stromdichte $\underline{j} = \underline{j}_\ell + \underline{j}_t$

mit $\nabla \times \underline{j}_\ell = 0$

$\nabla \cdot \underline{j}_t = 0$

mit $\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\varrho}_{\varepsilon_0 \nabla \underline{E}_\ell} + \underbrace{\nabla(\underline{j}_\ell + \underline{j}_t)}_{\nabla \underline{j}_t = 0} = 0$ folgt:

$$\nabla \cdot \left(\underline{j}_\ell + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}_\ell\right) = 0$$

Außerdem ist $\nabla \times \left(\underline{j}_\ell + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}_\ell\right) = 0$

$\Rightarrow \quad \underline{j}_\ell + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}_\ell = \text{const.} = 0$ damit für $r \to \infty$ verschwindet

$$\Rightarrow \quad \underline{j}_\ell = \varepsilon_0 \nabla \frac{\partial}{\partial t} \phi$$

Die Feldgl. (I) liefern:

$$\Delta \phi + \frac{\partial}{\partial t} \overbrace{\nabla \cdot \underline{A}}^{0} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \varrho$$

[$\operatorname{div} E = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho$

(II) $$\Delta \underline{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{A} - \nabla \underbrace{(\nabla \cdot \underline{A})}_{0} - \underbrace{\varepsilon_0 \mu_0 \nabla \frac{\partial}{\partial t} \phi}_{\mu_0 \underline{j}_\ell} = -\mu_0 \underline{j}$$

$\Rightarrow$ (I) $\boxed{\Delta \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \varrho}$ $\Rightarrow$ longitudinale Felder $\hat{=}$ Elektrostatik

(II) $\boxed{\Box \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}_t}$ $\Rightarrow$ transversale Felder $\hat{=}$ el. magn. Wellen

Die Coulomb-Eichung ist zweckmäßig bei Strahlungsprobleme!

4. Elektromagnetische Wellen

Im statischen Fall sind $\underline{E}$ und $\underline{B}$ entkoppelt.
Im dynamischen Fall sind über den

Verschiebungsstrom $\quad \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \underline{B} - \underline{j} = \varepsilon_0 \dot{\underline{E}}$

und das Induktionsgesetz $\quad \nabla \times \underline{E} = -\dot{\underline{B}}$

gekoppelt $\Rightarrow$ elektromagn. Wellenausbreitung

4.1. Freie Wellenausbreitung im Vakuum

Raumbereich ohne Quellen: $\rho = 0$, $\underline{j} = 0$

$$\Box \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad \Box \underline{A} = -\mu_0 \underline{j} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\begin{array}{l} \Box \phi = 0 \\ \Box \underline{A} = 0 \end{array}}$$

homogene Wellengleichung

(Lorentz-Eichung)

Wegen $\underline{E} = -\nabla\phi - \dot{\underline{A}}$, $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$ gilt auch $\boxed{\begin{array}{l} \Box \underline{E} = 0 \\ \Box \underline{B} = 0 \end{array}}$

(Dies folgt auch direkt aus $\nabla \times \underline{B} \overset{②}{=} \mu_0\varepsilon_0 \dot{\underline{E}}$, $\nabla \times \underline{E} \overset{①}{=} -\dot{\underline{B}}$

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{E}) = \nabla (\underbrace{\nabla \cdot \underline{E}}_{0}) - \Delta \underline{E} \overset{①}{=} -\nabla \times \dot{\underline{B}}$$
$$\overset{②}{=} -\varepsilon_0\mu_0 \ddot{\underline{E}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\Delta - \underbrace{\varepsilon_0 \mu_0}_{1/c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \underline{E} = 0 \quad)$$

Allgemeine Lösung von $\Box\, u(\underline{r},t) = 0$:

$$u(\underline{r},t) = F(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)$$

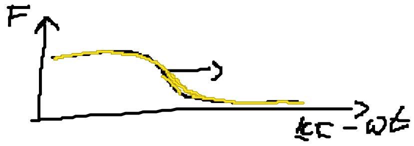
mit beliebiger, 2x-diff.bare Funktion F und

$\omega = c \cdot |\underline{k}|$. (d'Alembert'sche Lösung)

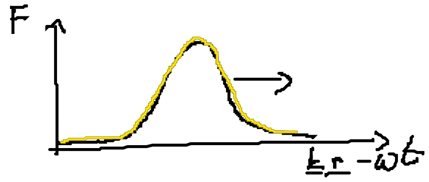
Beweis: $\Box F = \left(\underline{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) F''(\varphi) = 0$

<u>NB:</u> F muss nicht periodisch in φ sein

z.B. solitäre Wellen



„Kink"
„Front"

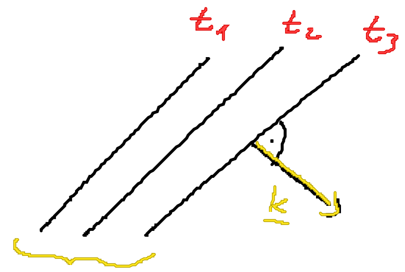


„Domäne"

$\underline{k}$ Wellenvektor

ω Frequenz

φ Phase



Flächen konstanter Phase

$\underline{k}\underline{r} - \omega t = \varphi(\underline{r},t) \stackrel{!}{=} \text{const.}$ [Ebene]

<u>Ebene Welle</u>

$$\rightarrow \underline{k} \left(\underline{r} - \frac{1}{k^2} \underline{k} (\omega t + \varphi) \right) = 0$$

Ausbreitung der Orte konstanter Phase $\rightarrow$ $\underline{r}(t) = \frac{1}{k^2}\,\underline{k}\,(\omega t + \varphi)$

$\omega = c \cdot |\underline{k}|$

$\Rightarrow$ Phasengeschwindigkeit $\underline{\underline{v}}_{ph} = \left.\frac{d\underline{r}}{dt}\right|_{\varphi = const} = \frac{\underline{k}}{k^2}\cdot\omega$

$= c\,\frac{\underline{k}}{|\underline{k}|} = c\,\underline{\underline{n}}$

Spezielle Lösung : harmonische ebene Welle

$$u(\underline{r},t) = \tilde{u}(\underline{k})\, e^{i(\underline{k}\,\underline{r} - \omega t)}$$

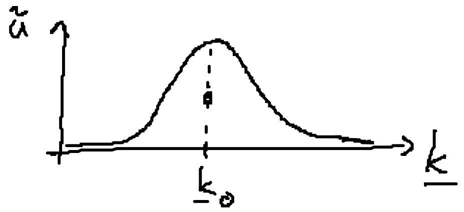
komplexe Amplitude

allg. Dispersionsrelation

lineare Superposition:

$$u(\underline{r},t) = \int d^3k\ \tilde{u}(\underline{k})\, e^{i(\underline{k}\,\underline{r} - \omega(\underline{k})\cdot t)}$$

Sei $\tilde{u}(\underline{k})$ um k_0 lokalisiert



Wellenpaket (im Ortsraum lokalisiert)

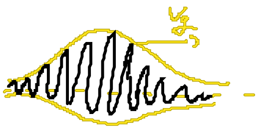
Taylor Entwicklung der Phase um $\underline{k}_0$

$$\omega(\underline{k}) \approx \omega(\underline{k}_0) + (\underline{k} - \underline{k}_0)\,\underbrace{\nabla_{\underline{k}}\,\omega(\underline{k})\Big|_{\underline{k}=\underline{k}_0}}_{\underline{v}_g} + \ldots$$

$$\approx \omega_0 + (\underline{k} - \underline{k}_0)\cdot \underline{v}_g$$

ergibt

$$u(\underline{r},t) = \underbrace{e^{i(\underline{k}_0\underline{r} - \omega_0 t)}}_{\substack{\text{Trägerwelle} \\ \text{mit Phasengeschw.} \\ v_{ph} = \frac{\omega_0}{|\underline{k}_0|}}} \underbrace{\int d^3\tilde{k}\; \tilde{u}(\underline{k}_0+\tilde{\underline{k}})\, e^{i\tilde{\underline{k}}(\underline{r}-\underline{v}_g t)}}_{\substack{\text{Einhüllende, Maximum} \\ \text{bewegt sich mit} \\ \text{Gruppengeschwindigkeit}}}$$



$$\underline{v}_g = \underline{\nabla}_k\, \omega(\underline{k})$$

Dispersionsrelation $\omega(\underline{k})$:

el. magn Wellen im Vakuum $\omega(\underline{k}) = c\,|\underline{k}|$

$$\Rightarrow \underline{v}_g = c\,\frac{\underline{k}}{|\underline{k}|} \stackrel{!}{=} \underline{v}_{ph} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\,\underline{n}$$

keine Dispersion!

d.h. kein Zerfließen!

[Im Gegensatz zur QM oder zur EDyn in Materie]

Polarisation

Betrachte el. magn. Welle

$$\underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}_0\, e^{i(\underline{k}\underline{r} - \omega t)}$$

$$\underline{B}(\underline{r},t) = \underline{B}_0\, e^{i(\underline{k}\underline{r} - \omega t)}$$

Allgemein gilt:

$\underline{E}$ heißt transversal, falls $\nabla\cdot\underline{E} = 0$ (quellenfrei)

$$\rightarrow i\underline{k}\cdot\underline{E} = 0 \quad \rightarrow \underline{E} \perp \underline{k}$$

$\underline{E}$ heißt longitudinal, falls $\nabla\times\underline{E} = 0$ (wirbelfrei)

$$\Rightarrow i\underline{k}\times\underline{E} = 0 \quad \rightarrow \underline{E} \parallel \underline{k}$$