3.2. Maxwell - Gleichungen im Vakuum

Aus CPT - Invarianz kann Struktur der Maxwell - Gl. begründet werden:

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times \underline{E} &= b_1 \dot{\underline{B}} \\ \nabla \times \underline{B} - \mu_0 \underline{j} &= a_2 \dot{\underline{E}} \end{aligned}\right\} \quad \text{6 Gleichungen legen } \underline{E}, \underline{B} \text{ für } t>0 \text{ fest}$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_0 \nabla \cdot \underline{E} - \varrho &= 0 \\ \nabla \cdot \underline{B} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{2 skalare Gleichungen}$$

Bestimmung von b_1, a_2: (über physikalische Forderungen)

(4) Ladungserhaltung

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon_0 \nabla \cdot \underline{E} - \varrho\right] = \varepsilon_0 \nabla \cdot \dot{\underline{E}} - \dot{\varrho}$$

$$\overset{\text{Maxwell}}{=} \frac{\varepsilon_0}{a_2} \nabla \cdot \left\{ \underbrace{\nabla \times \underline{B}}_{0} - \mu_0 \underline{j} \right\} - \dot{\varrho}$$

$$= -\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{a_2} \nabla \cdot \underline{j} - \dot{\varrho}$$

[Kontinuitätsgleichung

$0 = \nabla \underline{j} + \dot{\varrho}$]

Vergleich mit Kont. Gl.:

$\rightarrow \boxed{a_2 = \varepsilon_0 \mu_0}$

(5) Lorentzkraft

$$\underline{F} = q\left(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}\right) \qquad \text{Kraft auf bewegte Ladung } q$$

Bewegungsgleichung ($m\underline{a} = \underline{F}$) soll aus einem Extremalprinzip ableitbar sein.

[Hamilton'sches Prinzip $\delta S = 0$]: Lagrangefunktion - Funktion $L(\underline{r}, \underline{v}, t)$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_k} - \frac{\partial L}{\partial r_k} = 0 \qquad \text{ergeben Bewegungsgl.}$$

Ansatz: $L = \frac{m}{2} v^2 + q\left[\underline{v} \cdot \underline{A}(\underline{r}, t) - \phi(\underline{r}, t)\right]$

Einsetzen:

$$\frac{\partial L}{\partial v_k} = p_k = m v_k + q A_k(\underline{r}, t) \qquad \text{"kanon. Impuls"}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_k} = m \ddot{x}_k + q \frac{d}{dt} A_k(\underline{r}, t)$$

totale Zeitableitung von A_k

$$\frac{d}{dt} A_k(\underline{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} A_k + \left(\underline{v} \cdot \underline{\nabla}\right) A_k$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = q\left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k}(\underline{v} \cdot \underline{A})}_{\left[\underline{v} \times (\nabla \times \underline{A})_k + (\underline{v} \cdot \nabla) A_k\right]} - \frac{\partial}{\partial x_k}\phi\right]$$

$$\Rightarrow\ 0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_k} - \frac{\partial L}{\partial x_k} = m\ddot{x}_k + q\frac{\partial}{\partial t}A_k + q\left[-\underline{v}\times(\nabla\times\underline{A})\right]_k + q\frac{\partial}{\partial x_k}\phi$$

$$0 = m\ddot{\underline{r}} + q\left[\frac{\partial}{\partial t}\underline{A} + \nabla\phi - \underline{v}\times(\nabla\times\underline{A})\right]$$

Vergleich mit Lorentzkraft:

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{E}(\underline{r},t) &= -\frac{\partial}{\partial t}\underline{A}(\underline{r},t) - \nabla\phi(\underline{r},t)\\ \underline{B}(\underline{r},t) &= \nabla\times\underline{A}(\underline{r},t)\end{aligned}}$$

zurück zu Maxwell Gl.:

$$\nabla\times\underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{(\nabla\times\underline{A})}_{\underline{B}} - \underbrace{\nabla\times(\nabla\phi)}_{0} = -\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}$$

$\rightarrow$ $\underline{b_1 = -1}$

Vollständige Maxwellgleichungen im Vakuum

mit den neuen Feldgrößen

$\underline{D}(\underline{r},t) := \varepsilon_0\,\underline{E}(\underline{r},t)$ „dielektrische Verschiebung"

$\underline{H}(\underline{r},t) := \frac{1}{\mu_0}\underline{B}(\underline{r},t)$ „Magnetfeld"

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla\times\underline{E} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{B} &= 0\\ \nabla\cdot\underline{B} &= 0\\ \nabla\cdot\underline{D} &= \rho\\ \nabla\times\underline{H} - \frac{\partial}{\partial t}\underline{D} &= \underline{j}\end{aligned}}$$

(erste zwei Gleichungen:) homogene Gleichungen
Wechselwirkung einer Punktladung mit gegebenen Feldern $\underline{E}, \underline{B}$

(letzte zwei Gleichungen:) inhomogene Gleichungen
Erzeugung der Felder $\underline{D}$ und $\underline{H}$ durch gegebene Strom- und Ladungsverteilungen

3.3. Induktionsgesetz

Die Maxwell-Gleichung $\nabla\times\underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}$

integriert über Fläche F (ortsfest):

∂F

$$\underbrace{\int d\underline{f}\ \mathrm{rot}\,\underline{E}}_{\text{Stokes}} = \underbrace{-\int_F d\underline{f}\,\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}}$$

$$\oint_{\partial F} d\underline{s}\cdot\underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_F d\underline{f}\cdot\underline{B}$$

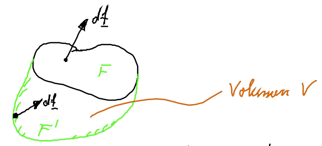
Def.: Φ ist der magnetische Fluss

$$\Phi := \int_F d\underline{f}\cdot\underline{B} = \int_{\partial F} d\underline{s}\,\underline{A}$$

$$\rightarrow \boxed{\oint_{\partial F} d\underline{s}\,\underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t)}$$

Potenzialdifferenz

$$U = \Delta\phi := -\oint_{\partial F} d\underline{s}\cdot\overset{-\nabla\phi}{\underline{E}}$$ induzierte Spannung



F & F' haben gleichen Rand

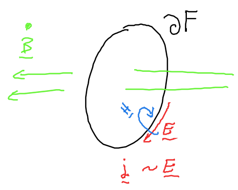
$$\int_F d\underline{f}\cdot\underline{B} - \int_{F'} d\underline{f}\,\underline{B} = \int_{\partial V} d\underline{f}\,\underline{B} = \int_V d^3r\,\underbrace{\mathrm{div}\,\underline{B}}_{0} = 0$$

=>

- Φ hängt nur vom Rand ∂F von F ab.

$$\boxed{U = \frac{\partial}{\partial t}\Phi}$$ Faraday'sches Induktionsgesetz

Lenz'sche Regel



$\dot{\underline{B}} \rightarrow \underline{E}$ induziert $\quad \mathrm{rot}\,\underline{E} = -\dot{\underline{B}}$

$\underline{E} \rightarrow$ Ladungsbewegung (Lorentzkraft) $\quad \underline{j}\sim\underline{E}$

$\underline{j} \rightarrow \underline{H}$ erzeugt $\quad \mathrm{rot}\,\underline{H} = \underline{j}$

$\underline{H}$ ist $\dot{\underline{B}}$ entgegengesetzt!

Maxwell-Gleichungen in Integralform

$$\oint_{\partial F} d\underline{s}\cdot\underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi$$

Zirkulation des el. Feldes entlang einer geschlossenen Linie ≙ zeitlicher Abnahme des eingeschlossenen Flusses

$$\int_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{B} = 0$$

Fluss des magn. Feldes durch eine geschlossene OF verschwindet.

$$\int_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}Q$$

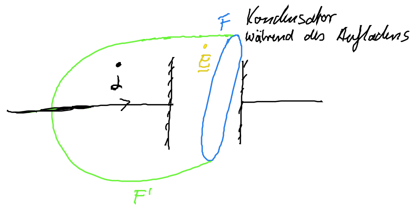
Fluss des elektr. Feldes durch eine geschlossene OF ≙ eingeschlossener Ladung

$$\int_{\partial F} d\underline{s}\cdot\underline{H} = \int_F d\underline{f}\,\dot{\underline{D}} + I$$

Zirkulation des magn. Feldes entlang einer geschlossenen Linie

≙ Konvektionsstrom

+ dielektrischen Verschiebungsstrom



3.4. Energiebilanz

Die Maxwell-Glu. enthalten die Kontinuitätsgleichung für die el. Ladung. $\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \underline{j} = 0$
"Ladungserhaltung"

Frage: gibt es noch andere Erhaltungssätze die aus den Maxwell-Gl. folgen?

Energietransport durch das el.-magn. Feld:

$$\nabla \times \underline{E} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{B} = 0 \qquad | \cdot \underline{H}$$

$$-\left[\nabla \times \underline{H} - \frac{\partial}{\partial t}\underline{D} = \underline{j}\right] \qquad | \cdot \underline{E}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\underline{H}\cdot(\nabla\times\underline{E}) - \underline{E}\cdot(\nabla\times\underline{H})}_{\nabla\cdot(\underline{E}\times\underline{H})} + \underbrace{\underline{H}\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}}_{\frac{1}{\mu_0}\underline{B}\frac{\partial}{\partial t}\underline{B} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\mu_0}\underline{B}^2\right)} + \underbrace{\underline{E}\frac{\partial}{\partial t}\underline{D}}_{\varepsilon_0\underline{E}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\underline{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\underline{E}^2\right)} = -\underline{j}\cdot\underline{E}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla\cdot\underline{S} + \frac{\partial}{\partial t}w = -\underline{j}\cdot\underline{E}}$$

Kontinuitätsgleichung
$\hat{=}$ Bilanzgleichung für Energietransport

$w := \frac{\varepsilon_0}{2}\underline{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\underline{B}^2 = \frac{1}{2}(\underline{E}\underline{D} + \underline{B}\underline{H})$ Energiedichte des el.-magn. Feldes

$\underline{S} := \underline{E}\times\underline{H}$ Energiestromdichte des el.-magn. Feldes
Poynting-Vektor

$-\underline{j}\cdot\underline{E}$: Quelldichte der Feldenergie
(Leistungsdichte)

$\underline{j}\cdot\underline{E} > 0$ Abnahme der Feldenergie z.B. durch Widerstand

$\underline{j}\cdot\underline{E} < 0$ Zunahme "
z.B. Antenne

Bsp.: Beschleunigung von Teilchen durch $\underline{E}, \underline{B}$ Felder

Kraft auf Ladung q: $\underline{F} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$

Kraftdichte: $\underline{f} = \varrho(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$

Leistungsdichte von Feld auf Ladungen ϱ: $\boxed{\underline{f} \cdot \underline{v}} = \underbrace{\varrho \cdot \underline{v}}_{\underline{j}} \cdot \underline{E} + \varrho \underbrace{\underline{v} \cdot (\underline{v} \times \underline{B})}_{0} = \underline{j} \cdot \underline{E}$

vom Feld auf Ladungen übertragen $\hat{=}$ Verlustdichte der Feldenergie

Magnetfeld leistet keine Arbeit $\underline{F} \perp \underline{v}$