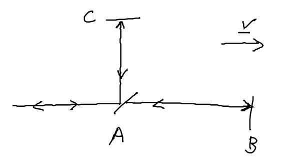
6. Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

6.1. Lorentz-Transformation in der speziellen Relativitätstheorie

Michelson-Morley-Experiment (1887)

Prüfung der Äther-Hypothese

(Erde bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\underline{v}$ relativ zu einem „Medium" in dem sich das Licht mit c relativ zum Medium ausbreitet)

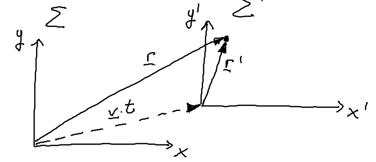


$$t_{ABA} - t_{ACA} \sim 10^{-8} t_{ABA}$$

nicht beobachtet!

$\boxed{\text{Erg.}}$ Licht breitet sich in jedem Inertialsystem mit der gleichen Geschwindigkeit aus.

Bisher: Galilei Transformation



Lichtblitz: breitet sich vom Ursprung Σ mit Geschw. c aus: $r = ct$

in Σ': $\underline{r}(t) = \underline{r}' + \underline{v}t$

$$c^2t^2 = \underline{r}^2 = (\underline{r}' + \underline{v}t)^2 = r'^2 + 2\underline{r}'\underline{v}t + v^2t^2$$

$$r'^2 = (c^2 - \underline{v}^2)t^2 - 2\underline{r}'\underline{v}t \neq c^2t^2 \quad \text{für } |\underline{v}| \neq 0$$

↯ zum Michelson Morley-Exp.!

$\Rightarrow$ Konzept der absoluten Zeit aufgeben $\longrightarrow$ spez. Relativitätstheorie

NB: Aufgabe des Konzeptes des absoluten Raumes $\longrightarrow$ allg. Relativitätstheorie

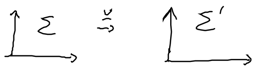
Postulat der spez. Relativitätstheorie

(Einstein 1905) „Zur Elektrodynamik bewegter Körper"

- Kein Inertialsystem ist gegenüber einem anderen ausgezeichnet (Relativitätsprinzip)
- Konsequenz: Galilei-Trafo verwerfen!
  - klass. Mechanik ist abzuändern, da sie Galilei-invariant ist (muss im Limit kleiner v wieder gelten)
  - El.dynamik hat schon die gewünschte Invarianz (Lorentz-invariant)

<u>Aufgabe:</u> Suche Trafo $\Sigma \to \Sigma'$ die folgende Forderungen erfüllt:

(i) Lineare Trafo $(\underline{r}, t) \to (\underline{r}', t')$



(ii) Jeder Pkt $\underline{r}'(t) = \text{konst}$ (ruhend in Σ') bewegt sich mit $\underline{v}$ in Σ. (und umgekehrt)

(iii) Die Lichtgeschw. c ist in beiden Systemen gleich.

(iv) Keines der beiden Systeme sei vor dem anderen ausgezeichnet.

$$\underline{r} \to \underline{r}' = f(\underline{r}, t; \underline{v})$$
$$t \to t' = g(\underline{r}, t, \underline{v})$$

Umkehrtrafo
$$\underline{r}' \to \underline{r} = f(\underline{r}', t'; -\underline{v})$$
$$t' \to t = g(\underline{r}', t; -\underline{v})$$

oBdA:
- $\underline{v}$ in x-Richtung
- $(x=0, t=0) \to (x'=0, t'=0)$
- $y = y'$, $z = z'$
- σ' bewegt sich nach $x = vt$

<u>Ansatz:</u>
$$x \to x' = \gamma (x - vt) \qquad (1) \qquad \text{wegen (ii), (i)}$$
$$x' \to x = \gamma (x' + vt') \qquad (2) \qquad \text{wegen (iv)}$$

Invarianz der Lichtgeschw. (iii): $x = ct \quad \to \quad x' = ct'$ **(3)**

(3) in (1): $ct \to ct' = \gamma (c - v) t$
in (2): $ct = \gamma (c + v) t'$

$$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} \overset{(\cdot)}{\Rightarrow} \quad c^2 t t' = \gamma^2 t t' (c^2 - v^2)$$

$$\to \boxed{\gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}} \qquad \beta := \frac{v}{c}$$

Für $v = 0$: $\gamma \overset{!}{=} 1$ (Galilei Trafo im Limit $v \to 0$)

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

Also:
$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

elim. x: $\Rightarrow \quad x' \sqrt{1-\beta^2} = x - vt = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} - vt$

$$vt = \sqrt{1-\beta^2} \left(-x' + \frac{x' + vt'}{1-\beta^2} \right)$$
$$= \sqrt{1-\beta^2} \left(\frac{\cancel{-x'} + x'\beta^2 + \cancel{x'} + vt'}{1-\beta^2} \right)$$
$$= \frac{x'\beta^2 + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t = \frac{t' + x'\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{analog} \qquad t' = \frac{t - x\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Ergebnis: Lorentz-Trafo

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - x\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

Zeit wird mittransformiert! Keine absolute Zeit!

Forderung: $1 - \frac{v^2}{c^2} > 0$; sonst imaginäre d.h. unphysikalische Werte.

$|v| < c$

Entwicklung für $|v| \ll c$, $\beta \ll 1$ $\rightarrow$ $\gamma \rightarrow 1$ $\rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} x' - vt &= x \\ t' &= t \end{aligned}}$ Galilei-Trafo

nichtrelativistische Mechanik gültig.

Eigenschaften der Lorentz-Trafo:

a) Lorentz-Invarianten

$$\boxed{r'^2 - c^2t'^2} = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2$$

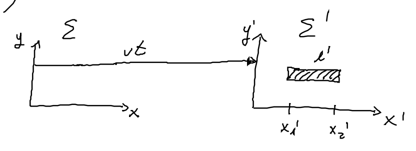
$$\overset{\text{Lorentz Trafo}}{=} \gamma^2(x^2 - 2xvt + v^2t^2) + y^2 + z^2 - \gamma^2c^2\left(t^2 - \frac{2xvt}{c^2} + \frac{x^2v^2}{c^4}\right)$$

$$= \frac{x^2 + v^2t^2}{1-\beta^2} - \frac{c^2t^2 + x^2\beta^2}{1-\beta^2} + y^2 + z^2$$

$$= \frac{(x^2 - c^2t^2)\cancel{(1-\beta^2)}}{\cancel{1-\beta^2}} + y^2 + z^2 = \boxed{r^2 - c^2t^2}$$

d.h. Kugelwellen mit Ausbreitungsgeschw. c (Lichtblitz in $O = O'$) sind invariant.

b) Lorentz-Kontraktion



Länge in Σ' : $l' = x_2' - x_1'$ (Ruhelänge in Σ')

Länge in Σ : $l = x_2 - x_1$

$$= \frac{1}{\gamma}(x_2' - x_1') = \frac{1}{\gamma} l'$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\, l' \quad < l'$$

z.B. $v/c = 0{,}75$ $\Rightarrow \gamma \approx 1{,}5$

$\frac{1}{\gamma} \approx \frac{2}{3}$

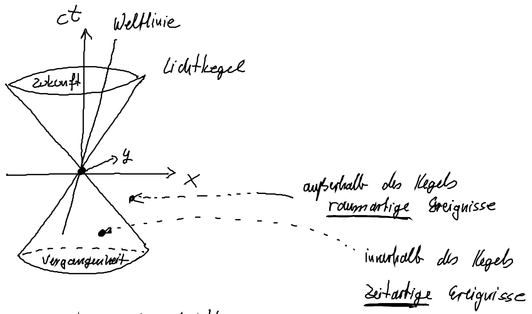
Visualisierung: www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/tuebingen/tuebingen.html

6.2. Vierervektoren und Minkowski-Raum

Geometrische Veranschaulichung von Ereignissen (x, y, z, t) im Raum-Zeit-Kontinuum (Minkowski-Raum):

Die Lorentz-Trafo lässt $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2$ invariant.

<u>Lichtkegel</u> : $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0$



Die Bewegung eines Massenpunktes ergibt im Minkowski-Raum (ct, x, y, z) eine <u>Weltlinie</u>.

Bei konst. Geschw. $\boxed{x = \beta c t}$ <u>gerade</u> (wegen $\beta < 1$ innerhalb des Lichtkegels)

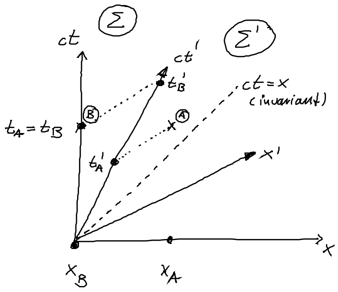
<u>Gleichzeitigkeit</u>

Ereignisse A, B an Orten x_A, x_B seien gleichzeitig in Σ.

Im Lorentz-transformierten Inertialsystem sind sie <u>nicht</u> mehr gleichzeitig

x'-Achse : $t' = 0 \rightarrow x = \frac{1}{\beta} ct \rightarrow ct = \beta x < x$

ct'-Achse : $x' = 0 \rightarrow x = \beta c t \rightarrow ct = \frac{1}{\beta} x > x$



<u>Kausalität</u>

Reihenfolge zweier Ereignisse an Orten x_1, x_2 in Σ : $t_1 < t_2$

Reihenfolge in Σ' :

$$t_2' - t_1' = \gamma \left[(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2} (x_2 - x_1) \right] \begin{array}{l} > 0 \text{ falls } c(t_2 - t_1) > \beta (x_2 - x_1) \\ < 0 \text{ falls } \qquad\qquad < \end{array}$$

Lorentz-Trafo

Für <u>raumartige</u> Ereignisse $c(t_2 - t_1) < (x_2 - x_1)$ lässt sich eine Lorentz-Trafo finden, so dass beide Ereignisse gleichzeitig sind. $\left(\beta = \frac{c(t_2 - t_1)}{x_2 - x_1} \right)$ oder die Reihenfolge sogar umgedreht wird. $\left(\beta > \frac{c(t_2 - t_1)}{x_2 - x_1} \right)$ für alle $(x_2, t_2) \in \mathbb{R}^1$.

<u>Aber</u> : Nur <u>zeitartige</u> Ereignisse können sich kausal beeinflussen, da eine Signalübertragung mit $v \leq c$ möglich ist, deren Reihenfolge wird nicht geändert, also kein Widerspruch zum Kausalitätsprinzip.

Raumartige Ereignisse können sich nicht kausal beeinflussen.