Wdh.: Maxwell - gleichungen
in Lorentz-invarianter Formulierung

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu\lambda k}\,\partial_\nu F_{\lambda k} &= 0 \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^\nu \end{aligned}}$$

"4-Rotation"

"4-Divergenz"

Ziel: des Abschnitts 6.5 - 6.7
Formulierung als Lagrange'sche Feldtheorie

Wdh.: aus 6.5 bekannt:

Wirkung $W = \int_1^2 \left\{ -m_0 c\, ds - \frac{q}{c}\phi^\mu dx_\mu \right\}$ aus $\delta W = 0$ folgt $\frac{d}{ds} p^\mu = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu$

Bewegungsgleichung eines gel. Teilchens im Feld
+
Leistungsbilanz

Lagrangefunktion L aus Wirkungsintegral

$W = \int L\, dt$ $L = L_{\text{Teilchen}} + L_{\text{Teilchen-Feld}}$

$L_{\text{Teilchen-Feld}}\, dt = (-q\phi + q\underline{v}\cdot\underline{A})\, dt = -\frac{q}{c}\phi^\mu dx_\mu$ ← WW einer geladenen Masse mit EM Feld

$L_{\text{Teilchen}}\, dt = (-m_0 c^2 + \frac{m_0}{2} v^2)\, dt = -m_0 c\, ds$ ≙ kin & pot. Energie einer ungeladenen Masse ($v \ll c$)

- Feldenergie der EM-Felder noch nicht berücksichtigt.

Einschub Lagrangedichte

• herkömmliche Lagrangefunktion $L(u_i, \dot{u}_i, t)$

Auslenkung eines Teilchens

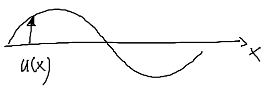
Wirkung
$W = \int L\, dt$
$\int \sum_i a \frac{L_i}{a}\, dt$

aus $\delta W = 0$ folgt

$$\boxed{\frac{d}{dt}\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i}}_{\text{gen. Impuls}} - \frac{\partial L}{\partial u_i} = 0}$$

Euler-Lagrange-Gl.

• kontinuierliche Lagrangedichte $\mathcal{L}(x, u(x), \nabla u(x))$



Auslenkung an einem Ort

kont. Massenverteilung

Wirkung

$W = \int dt \int d^3r\, \mathcal{L}(x, u(x), \nabla u, t, \dot{u})$

$= \int d^4x\, \mathcal{L}(x, u, \nabla u)$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^{d+1} = \mathbb{R}^4$

aus $\delta W = 0$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_m}{\partial x_k}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_m} = 0}$$

für $u \in \mathbb{R}^M$: eine Gl. für jede Komponente

Für $d=3$, $M=1$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x_i}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0 \quad (*)$$

Euler Lagrange Gl. für skalares Feld

Bsp. : Elektrostatik als Feldtheorie aus Lagrangedichte

skalares Feld : $\phi(\underline{r})$ $[= u(\underline{x})]$

Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\left[(\nabla\phi)^2\right] - \rho\,\phi(r) = \mathcal{L}_E(\underline{r}, \phi(\underline{r}), \nabla\phi)$$

Energiedichte — pot. Energie

Euler-Lagrange Gl:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_E}{\partial \phi} = -\rho$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x_i}} = \frac{\varepsilon_0}{2}\cdot 2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\varepsilon_0 E_i \quad \to \quad \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x_i}} = -\varepsilon_0 \,\mathrm{div}\, \underline{E}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{-\varepsilon_0 \,\mathrm{div}\, \underline{E} + \rho = 0}$$

Gauß'sches Gesetz der Elektrostatik ☒

- Magnetostatik als Feldtheorie

  Vektorfeld $\underline{A}(\underline{r})$

  Lagrangedichte $\mathcal{L}_M = \frac{1}{2\mu_0}\left[(\nabla \times \underline{A})^2\right] - \underline{j}\cdot\underline{A}$

  Energiedichte

  → Euler-Lagrange : ..... (selber rechnen) $\quad \mathrm{rot}\, \underline{B} = \mu_0 \underline{j}$ $\quad$ Ampère Gesetz der Magnetostatik ☒

- E-Dynamik : $\mathcal{L}(\phi, \underline{A}, \nabla\phi, \nabla A_1, \nabla A_2, \nabla A_3, \dot{\underline{A}}, \dot{\phi})$

  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_E - \mathcal{L}_M$ liefert korrekte Maxwell-Gl.

Ende Einschub

6.6. Eichinvarianz und Ladungserhaltung

WW einer kont. Ladungsdichte $\rho(x^\nu)$ mit Feld:

$$W_{\text{Teilchen-Feld}} = -\frac{1}{c}\int d^3r\, \rho \int dx_\nu\, \phi^\nu$$

$$= -\frac{1}{c^2}\underbrace{\int d^3r\, c\,dt}_{d\Omega}\; \rho \frac{dx_\nu}{dt}\phi^\nu = -\frac{1}{c^2}\int_\Omega d\Omega\; j_\nu \phi^\nu$$

Raumelement im Minkowskiraum
$d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$

$$\rightarrow \mathcal{L}_{TF}(x^\nu, \phi^\nu, \partial^\mu\phi^\nu) = -\frac{1}{c^2} j_\nu \phi^\nu$$

• Umeichung der Potenziale (lässt EM-Felder invariant)

$$\tilde{\phi}^\nu = \phi^\nu + \partial^\nu \varphi(x^\mu)$$

skalare Funktion

$$\left[\;\begin{aligned}\tilde{\underline{A}} &= \underline{A} + \nabla F\\ \tilde{\phi} &= \phi - \frac{\partial}{\partial t}F\end{aligned}\;\right]$$

Welche Auswirkung auf Wirkung W_{TF}?

$$\tilde{W}_{TF} = -\frac{1}{c^2}\int_\Omega d\Omega\, j_\nu(\phi^\nu + \partial^\nu\varphi)$$

$$= W_{TF} - \frac{1}{c^2}\int_\Omega d\Omega\, \underbrace{j_\nu \partial^\nu\varphi}_{\partial^\nu(\varphi j_\nu) - \varphi(\partial^\nu j_\nu)} = W_{TF} - \frac{1}{c^2}\underbrace{\int_\Omega d\Omega\, \partial^\nu(\varphi j_\nu)}_{\int_{\mathbb{R}^3} d^3r\, c\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial}{c\partial t}(\varphi c\rho) - c\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathbb{R}^3} d^3r\, \nabla(\varphi\underline{j})} + \frac{1}{c^2}\int_\Omega d\Omega\, \varphi(\partial^\nu j_\nu)$$

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3r\, c\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial}{c\partial t}(\varphi c\rho)}_{[\varphi\rho]_{t_1}^{t_2}} \qquad \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3r\, \nabla(\varphi\underline{j})}_{\oint d\underline{f}\, \varphi\underline{j} = 0}$$

weglassen, da Variation bei t_1, t_2 verschwindet

$$= W_{TF} + \frac{1}{c^2}\int_\Omega d\Omega\, \varphi\,\underbrace{(\partial^\nu j_\nu)}_{0}$$

Kontinuitätsgleichung
$\partial^\nu j_\nu = 0$
"Ladungserhaltung"

Fazit: "Äquivalenz zwischen Eichinvarianz $\tilde{W}_{TF} = W_{TF}$ und Ladungserhaltung $\partial^\nu j_\nu = 0$!

(tiefer Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen)

klass. Mechanik: Noether Theorem

6.7. Inhomogene Maxwell-Gleichungen aus dem Wirkungsprinzip

Die Bewegungsgl. für ein Teilchen im Feld $F^{\nu k}$ $\rightarrow$ $\frac{d}{ds} p^\nu = \frac{q}{c} F^{\nu k} u_k$

sowie die homogenen Maxwell-Gln. $\varepsilon_{\nu k \lambda \pi} \partial^k F^{\lambda \pi} = 0$ (wegen $F^{\lambda\pi} = \partial^\lambda \phi^\pi - \partial^\pi \phi^\lambda$)

ergeben sich aus den Wirkungsintegralen

$$W_T + W_{TF} = \int_\Omega d\Omega \left\{ \underbrace{\mu \frac{ds}{dt}}_{\text{Teilchen}} - \underbrace{\frac{1}{c^2} j_\nu \phi^\nu}_{\text{Teilchen Feld}} \right\}$$

durch Variation der Bahn x^λ bei gegebenen Potenzialen $\phi^\nu(x^\lambda)$.

Vermutung:

– durch Variation der Felder (bzw. Potenziale) bei gegebenen Bahnen ergeben inhomogene Maxwell-Gl.

$\uparrow$

Erzeugung von Feldern durch Ladungen/Ströme.

gesucht: Lagrangedichte $\mathcal{L}_F$ zur Beschreibung der Dynamik der Felder:

$$W_F = \int_\Omega d\Omega \, \mathcal{L}_F(F^{\nu k}, \phi^\nu)$$

Forderungen:
(i) Feldgleichungen linear $\rightarrow$ $\mathcal{L}_F$ bilinear in $F^{\nu k}$, ϕ^ν
(ii) Eindeutig bestimmbar durch $F^{\nu k}$ $\rightarrow$ keine Ableitungen $\partial^\lambda F^{\nu k}$
(iii) Eichinvarianz $\rightarrow$ $\phi^\nu \phi_\nu$ darf nicht auftreten
(iv) Lorentzinvarianz

Möglichkeit $\Rightarrow$ $\mathcal{L}_F = -\alpha F^{\nu k} F_{\nu k}$

$$\boxed{W = \int d\Omega \left\{ \underbrace{-\mu \frac{ds}{dt}}_{W_T} \underbrace{- \frac{1}{c^2} j_\nu \phi^\nu}_{W_{TF}} \underbrace{- \alpha F^{\nu k} F_{\nu k}}_{W_F} \right\}}$$

Variation für feste Bahn (d.h. festes j_ν)

$$\delta W = \int d\Omega \left\{ - \frac{1}{c^2} \underbrace{j_\nu \delta \phi^\nu}_{j^\nu \delta\phi_\nu} - \alpha \, \delta \underbrace{(F^{\nu k} F_{\nu k})}_{} \right\}$$

$$(\delta F^{\nu k}) F_{\nu k} + F^{\nu k} (\delta F_{\nu k}) = 2 F^{\nu k} \delta F_{\nu k}$$

$$(\delta F^{\nu k}) F_{\nu k} = (\delta F_{\nu k}) F^{\nu k}$$

mit $\delta F_{\nu k} = \delta(\partial_\nu \phi_k - \partial_k \phi_\nu) = \partial_\nu \delta \phi_k - \partial_k \delta \phi_\nu$

$$2F^{\nu k}\,\delta F_{\nu k} = \underbrace{2F^{\nu k}\partial_\nu\delta\phi_k}_{} - 2F^{\nu k}\delta_k\delta\phi_\nu = -4F^{\nu k}\partial_k\delta\phi_\nu$$

umbenennen: $2F^{k\nu}\partial_k\delta\phi_\nu$

antisymm. von $F^{\nu k}$ $\rightarrow = -2F^{\nu k}\partial_k\delta\phi_\nu$

$$\delta W = \int d\Omega \left\{ -\frac{1}{c^2} j^\nu \delta\phi_\nu + 4\alpha F^{\nu k}\partial_k\delta\phi_\nu \right\}$$

mit dem verallgemeinerten Gauß'schen Satz (in 4D): $\int_\Omega d\Omega\, \partial_k\left(F^{\nu k}\delta\phi_\nu\right) = \int_{\partial\Omega} df_k\, F^{\nu k}\delta\phi_\nu = 0$

$\mathbb{R}^3\times[t_1,t_2]$ 3-dim Rand des 4-dim. Vol.

$\delta\phi|_{t_1,t_2} = 0$

$F^{\nu k}\rightarrow 0$ für $x^i\rightarrow\infty$ $(i=1,2,3)$

$$\int d\Omega\, F^{\nu k}\partial_k\delta\phi_\nu = \underbrace{\int d\Omega\,\partial_k\left(F^{\nu k}\delta\phi_\nu\right)}_{0} - \int d\Omega\,\left(\partial_k F^{\nu k}\right)\delta\phi_\nu$$

Also: $\delta W = \int_\Omega d\Omega \underbrace{\left(-\frac{1}{c^2}j^\nu - 4\alpha\left(\partial_k F^{\nu k}\right)\right)}_{}\delta\phi_\nu \stackrel{!}{=} 0$ für bel. $\delta\phi_\nu$

$$\boxed{\partial_k F^{\nu k} = -\frac{1}{4\alpha c^2} j^\nu}$$

Wahl der Einheiten: $\rightarrow \alpha = \frac{\varepsilon_0}{4c}$

$$\boxed{\partial_k F^{k\nu} = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^\nu}$$

inhomogene Maxwell gleichungen. !