1.3. Poisson-Gleichung und Green'sche Funktion

Allgemeine Lösung der Poisson-Gl. $\Delta \phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\underline{r})$

- partielle DGL $\phi(\underline{r})$
- wird bestimmt durch Randbedingungen (sonst nicht eindeutig)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Green'sche Funktion

Allgemeine Methode zur Lösung inhomogener (partielle oder gewöhnliche) DGL für vorgegebene Inhomogenität.

z.B. Mechanik: gedämpfter Osz.
QM: Streutheorie
Edyn: Poissgl, inhom. Wellengleichung

Abstrakte Lösungsschema:

$$\boxed{\Delta \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho} \quad \xrightarrow[\text{Invertieren des Differenzial-Op.}]{\text{Lösung durch}} \quad \boxed{\phi = \tilde{G} \rho}$$

$\Downarrow$ Fourier-Trafo $\phi(\underline{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \; \hat{\phi}(\underline{k}) e^{i\underline{k}\underline{r}}$

$\Uparrow$ $\phi(\underline{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, G(\underline{r}-\underline{r}') \rho(\underline{r}')$

$$\boxed{-k^2 \hat{\phi}(\underline{k}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \hat{\rho}(\underline{k})} \quad \xrightarrow[\text{Multiplikation}]{\text{Invertieren durch}} \quad \boxed{\hat{\phi} = \hat{G} \hat{\rho}}$$

$$\hat{G} = \frac{1}{\varepsilon_0 |\underline{k}|^2}$$

Explizite Durchführung:

(i) Lösung für Punktladung bei $\underline{r}''$: $\rho(\underline{r}') = \delta(\underline{r}' - \underline{r}'')$

$$\phi(\underline{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, G(\underline{r}-\underline{r}') \underbrace{\delta(\underline{r}' - \underline{r}'')}_{\rho(\underline{r}')} = G(\underline{r} - \underline{r}'')$$

d.h. Greensche Funktion $G(\underline{r} - \underline{r}'')$ ist Lösung der Poisson-Gl.

$$\Delta_r G(\underline{r} - \underline{r}'') = -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\underline{r} - \underline{r}'')$$ für δ-förmige Inhomogenität. (Punktladung)

(ii) Dann Lösung für beliebige Inhomogenitäten $\rho(\underline{r})$ durch Faltung mit G

$$\phi(\underline{r}) = \int d^3r' \, G(\underline{r} - \underline{r}') \rho(\underline{r}')$$

Greensche Fkt. erst durch RB bestimmt!

- Spezielle RB $\phi(\underline{r}) \to 0$ für $|\underline{r}| \to \infty$

dann $G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \Rightarrow \phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$ (*)

Beweis von (*)

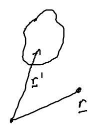
Problem: Singularität bei $\underline{r} = \underline{r}'$

Fallunterscheidung
- $\underline{r} \neq \underline{r}'$ (a)
- $\underline{r} = \underline{r}'$

(a) $\underline{r} \neq \underline{r}'$

$$-\Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = -\nabla_r \cdot \nabla_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$= \nabla_r \frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

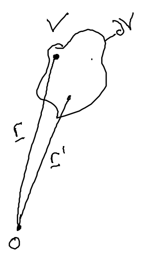


$$= \frac{\nabla_r(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} + (\underline{r}-\underline{r}')\nabla_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

$(\nabla \cdot \underline{r} = 3)$

$$= \frac{3}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} - (\underline{r}-\underline{r}')\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|^5}\, 3(\underline{r}-\underline{r}') = \underline{\underline{0}}$$

(b) falls $\underline{r} = \underline{r}'$



$$\int_V d^3r' \, \underset{\text{div}}{\nabla_r} \underset{\text{grad}}{\nabla_r} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial V} d\underline{f} \cdot \nabla_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$d\underline{f} = r^2 \underline{e}_r \underbrace{\sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta}_{d\Omega}$

$$= -\int_{\partial V} d\underline{f} \cdot \frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} = -\oint d\Omega = -4\pi$$

$$= \begin{cases} -4\pi & \text{für } \underline{r} \in V \\ 0 & \text{für } \underline{r} \notin V \quad \text{(da Integrand Null ist)} \end{cases}$$

Ergebnis $\boxed{\Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = -4\pi\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')}$ (*₂)

Dirac'sche δ-Funktion (δ-Distribution)

$$\int_V d^3r \, \delta(\underline{r}-\underline{r}_0) = \begin{cases} 1 & \underline{r}_0 \in V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Also: $$\Delta\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\,\rho(\underline{r}')\,\Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$\overset{(*2)}{=} -\frac{4\pi}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\,\rho(\underline{r}')\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

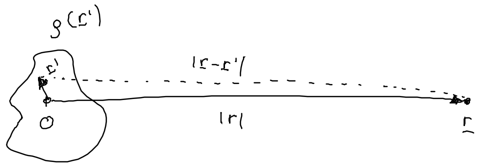
$$= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{r})$$

■

es gilt $\Delta_r G(\underline{r}-\underline{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')$ $\longrightarrow$ $\boxed{G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}$ für $\phi(\underline{r}) \xrightarrow{r\to\infty} 0$

1.4. Elektrische Multipol-Entwicklung

Betrachte räumlich begrenzte Ladungsverteilung $\rho(\underline{r}')$ in der Umgebung von $\underline{r}'=0$



weit entfernt von Ladungsverteilung

Frage: asymptotisches Verhalten von

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \quad \text{für } |\underline{r}|\to\infty$$

Methode: Entwicklung des Integranden in eine Taylorreihe für $r \gg r'$

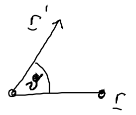
$$G(\underline{r}-\underline{r}') = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}\left(\underline{r}'\cdot\nabla_r\right)^\ell G(\underline{r})$$

$$\phi(\underline{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\left(\underline{r}'\cdot\nabla_r\right)^\ell G(\underline{r})\,\rho(\underline{r}')$$

explizit: $G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\underline{r}-\underline{r}'|}$

$$\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \left(\underline{r}^2 - 2\underline{r}\underline{r}' + \underline{r}'^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{r}\left(1 - 2\frac{r'}{r}\cos\vartheta + \frac{r'^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$



Durch die für $r'<r$, $|\xi|<1$ konvergente Reihen

$$\left(1 - 2\frac{r'}{r}\xi + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^\ell P_\ell(\xi)$$

sind die Legendre Polynome $P_\ell(\xi)$ definiert (Kugelflächenfunktionen).

es gilt: $$P_\ell(\xi) = \frac{1}{\ell!}\left[\frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell}\left(1-2t\xi+t^2\right)^{-1/2}\right]_{t=0} \qquad \left[\frac{r'}{r}=t\right]$$

Insbesondere $P_0(\xi) = 1$

$P_1(\xi) = \xi = \cos\vartheta$

$P_2(\xi) = \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1) = \frac{1}{4}\, 3\cos 2\vartheta + 1$

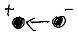
$$\Rightarrow \quad \phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\int d^3\mathbf{r}'\, \rho(\underline{r}') \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^{l} P_l(\cos\vartheta)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{Q}_l\, r^{-l-1} \qquad \text{mit } Q_l = \int d^3r'\, r'^{\,l}\, \rho(\underline{r}')\, P_l(\cos\vartheta)$$

"2^l-Pol"

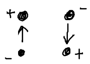
Beispiele

+ $\quad l=0$ **:** Monopol $\quad Q_0 = \int d^3r'\, \rho(\underline{r}')$ Gesamtladung $\quad \boxed{\phi^{(0)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0}{r}}$

 $l = 1$: Dipol $\quad Q_1 = \int d^3r'\, \rho(\underline{r}')\, \overbrace{\cos\vartheta \cdot r'}^{\frac{\underline{r}\,\underline{r}'}{r}}$ $\quad$ Dipolmoment $\quad \underline{p} = \int d^3r'\, \rho(\underline{r}')\, \underline{r}'$

• wichtigster Term für insgesamt neutrale Körper

$$\hookrightarrow \phi^{(1)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\underline{p}\cdot\underline{r}}{r^3} = \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2} = \phi^{(1)}(\underline{r})}$$

 $l = 2$: Quadrupol

$$Q_2 = \frac{1}{2}\int d^3r'\, \rho(r')\, r'^2\, (3\cos^2\vartheta - 1)$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3r'\, \rho(r')\left(3\,\frac{\underline{r}'\underline{r}}{r}\cdot\frac{\underline{r}'\underline{r}}{r} - \mathbf{r}'^2\right)$$

$$= \frac{1}{2r^2}\int d^3r'\, \rho(\underline{r}')\left(3x_k' x_l' \cdot x_k x_l - r'^2 r^2\right)$$

$$Q_{kl} = \int d^3r'\, \rho(\underline{r}')\left(3x_k' x_l' - r'^2 \delta_{kl}\right) \qquad \text{Quadrupoltensor}$$