1.3. Poisson-Gleichung und Green'sche Funktion

Allgemeine Lösung der Poisson-Gl. $\Delta\phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{r})$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

- partielle DGL $\phi(\underline{r})$
- wird bestimmt durch Randbedingungen (sonst nicht eindeutig)

Green'sche Funktion

Allgemeine Methode zur Lösung inhomogener (partielle oder gewöhnliche) DGL für vorgegebene Inhomogenität.

z.B. Mechanik: gedämpfter Osz.
QM: Streutheorie
Edyn: Poissgl, inhom. Wellengleichung

Abstrakte Lösungsschema:

$\boxed{\Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho}$ $\xrightarrow{\text{Lösung durch Invertieren des Differenzial-Op.}}$ $\boxed{\phi = \tilde{G}\rho}$

$\Downarrow$ Fourier-Trafo

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\, \hat{\phi}(\underline{k})\, e^{i\underline{k}\underline{r}}$$

$\Uparrow$ $\phi(\underline{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, G(\underline{r}-\underline{r}')\,\rho(\underline{r}')$

$\boxed{-k^2\hat{\phi}(\underline{k}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\hat{\rho}(\underline{k})}$ $\xrightarrow{\text{Invertieren durch Multiplikation}}$ $\boxed{\hat{\phi} = \hat{G}\hat{\rho}}$

$\hat{G} = \frac{1}{\varepsilon_0 |\underline{k}|^2}$

Explizite Durchführung:

(i) Lösung für Punktladung bei $\underline{r}''$: $\rho(\underline{r}') = \delta(\underline{r}'-\underline{r}'')$

$$\phi(\underline{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, G(\underline{r}-\underline{r}')\,\underbrace{\delta(\underline{r}'-\underline{r}'')}_{\rho(\underline{r}')} = G(\underline{r}-\underline{r}'')$$

d.h. Green'sche Funktion $G(\underline{r}-\underline{r}'')$ ist Lösung der Poisson-Gl.

$$\Delta_r G(\underline{r}-\underline{r}'') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}'')$$

für δ-förmige Inhomogenität. (Punktladung)

(ii) Dann Lösung für beliebige Inhomogenitäten $\rho(\underline{r})$ durch Faltung mit G

$$\phi(\underline{r}) = \int d^3r'\, G(\underline{r}-\underline{r}')\,\rho(\underline{r}')$$

Greensche Fkt. erst durch RB bestimmt!

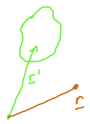
- Spezielle RB $\phi(\underline{r}) \to 0$ für $|\underline{r}| \to \infty$

dann $$G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \quad \Longrightarrow \quad \phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \qquad (*)$$

Beweis von $(*)$

Problem: Singularität bei $\underline{r} = \underline{r}'$ → Fallunterscheidung: (a) $\underline{r} \neq \underline{r}'$, (b) $\underline{r} = \underline{r}'$

(a) $\underline{r} \neq \underline{r}'$



$$-\Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = -\nabla_r \cdot \nabla_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

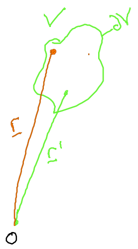
$$= \nabla_r \frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

$$= \frac{\nabla_r(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} + (\underline{r}-\underline{r}')\nabla_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

$(\nabla \cdot \underline{r} = 3)$

$$= \frac{3}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} - (\underline{r}-\underline{r}')\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|^5}\, 3(\underline{r}-\underline{r}') = \underline{\underline{0}}$$

(b) falls $\underline{r} = \underline{r}'$



$$\int_V d^3r' \, \overset{\text{div}}{\nabla_r}\overset{\text{grad}}{\nabla_r} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial V} d\underline{f} \cdot \nabla_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \qquad d\underline{f} = r^2 \underline{e}_r \underbrace{\sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta}_{d\Omega}$$

$$= -\int_{\partial V} d\underline{f} \cdot \frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} = -\oint d\Omega = -4\pi$$

$$= \begin{cases} -4\pi & \text{für } \underline{r} \in V \\ 0 & \text{für } r \notin V \quad (\text{da Integrand Null ist}) \end{cases}$$

Ergebnis $$\boxed{\Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = -4\pi\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')} \qquad (*_2)$$

Dirac'sche δ-Funktion (δ-Distribution)

$$\int_V d^3r \, \delta(\underline{r}-\underline{r}_0) = \begin{cases} 1 & \underline{r}_0 \in V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Also: $\Delta \phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \rho(\underline{r}') \, \underline{\Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}$

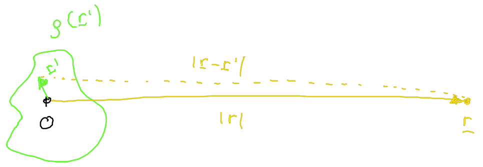
$$\overset{(*2)}{=} -\frac{4\pi}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \rho(\underline{r}') \, \underline{\delta(\underline{r}-\underline{r}')}$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\underline{r})$$

es gilt $\Delta_r G(\underline{r}-\underline{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}') \longrightarrow \boxed{G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}$ für $\phi(\underline{r}) \xrightarrow{r\to\infty} 0$

1.4. Elektrische Multipol-Entwicklung

Betrachte räumlich begrenzte Ladungsverteilung $\rho(\underline{r}')$ in der Umgebung von $\underline{r}'=0$



weit entfernt von Ladungsverteilung

Frage: asymptotisches Verhalten von

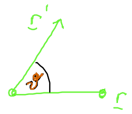
$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \quad \text{für } |\underline{r}| \to \infty$$

Methode: Entwicklung des Integranden in eine Taylorreihe für $r \gg r'$

$$G(\underline{r}-\underline{r}') = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} (\underline{r}' \cdot \nabla_r)^\ell \, G(\underline{r})$$

$$\phi(\underline{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, (\underline{r}' \cdot \nabla_r)^\ell \, G(\underline{r}) \, \rho(\underline{r}')$$

explizit: $G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 |\underline{r}-\underline{r}'|}$



$$\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = (r^2 - 2\underline{r}\,\underline{r}' + r'^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{r}\left(1 - 2\frac{r'}{r}\cos\vartheta + \frac{r'^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Durch die für $r' < r$, $|\xi| < 1$ konvergente Reihen

$$\left(1 - 2\frac{r'}{r}\xi + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^\ell P_\ell(\xi)$$

sind die Legendre Polynome $P_\ell(\xi)$ definiert (Kugelflächenfunktionen).

es gilt: $P_\ell(\xi) = \frac{1}{\ell!}\left[\frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell}(1 - 2t\xi + t^2)^{-1/2}\right]_{t=0}$ $\quad \left[\frac{r'}{r} = t\right]$

Insbesondere $P_0(\xi) = 1$

$P_1(\xi) = \xi = \cos\vartheta$

$P_2(\xi) = \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1) = \frac{1}{4}\, 3\cos 2\vartheta + 1$

$$\Rightarrow \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}\int d^3r'\,\rho(\mathbf{r}')\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\vartheta)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty} Q_l\, r^{-l-1}$$

mit $Q_l = \int d^3r'\, r'^l\, \rho(\mathbf{r}')\, P_l(\cos\vartheta)$

"2^l-Pol"

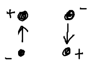
Beispiele

⊕ $l=0$: Monopol $\quad Q_0 = \int d^3r'\,\rho(\mathbf{r}')$ Gesamtladung $\quad \boxed{\phi^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0}{r}}$

$l=1$: Dipol $\quad Q_1 = \int d^3r'\,\rho(\mathbf{r}')\,\overbrace{\cos\vartheta\cdot r'}^{\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r}}$ Dipolmoment $\quad \mathbf{p} = \int d^3r'\,\rho(\mathbf{r}')\,\mathbf{r}'$

• wichtigster Term für insgesamt neutrale Körper

$$\hookrightarrow \phi^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3} = \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q_1}{r^2} = \phi^{(1)}(\mathbf{r})}$$



$l=2$: Quadrupol

$$Q_2 = \frac{1}{2}\int d^3r'\,\rho(r')\, r'^2\,(3\cos^2\vartheta - 1)$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3r'\,\rho(r')\left(3\,\frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}}{r}\cdot\frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}}{r} - r'^2\right)$$

$$= \frac{1}{2r^2}\int d^3r'\,\rho(r')\left(3x_k'x_l'\cdot x_k x_l - r'^2 r^2\right)$$

$$Q_{kl} = \int d^3r'\,\rho(\mathbf{r}')\left(3x_k'x_l' - r'^2\delta_{kl}\right)$$

Quadrupoltensor