4.2. Retardierte Potenziale

<u>Ziel:</u> Lösung der Wellengleichungen zur Bestimmung der Potenziale $\phi, \underline{A}$

<u>Methode:</u> Lösung der DGLn im Fourierraum
→ danach Rücktransformation

$$\boxed{\begin{aligned} \Box \phi &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ \Box \underline{A} &= -\mu_0 \underline{j} \end{aligned}}$$

Lorentz-Eichung

<u>Allgemein</u> $\quad \Box\, u(\underline{r},t) = -f(\underline{r},t)$

gesucht

Quellen, Inhomogenitäten

$\Downarrow$ Fourier Trafo

$$\hat{u}(\underline{k},\omega) = \hat{G}\cdot\hat{f}(\underline{k},\omega)$$

Inverse des Diff. Operators

$\Downarrow$ Rücktrafo

$$u(\underline{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')\, f(\underline{r}',t')$$

<u>Fourier-Transformation</u>

$$S(\underline{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \hat{S}(\underline{q},\omega)\, e^{i(\underline{q}\underline{r}-\omega t)}$$

$\underline{q}$: Wellenvektor

$$\hat{S}(\underline{q},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r \int_{-\infty}^{\infty} dt\, S(\underline{r},t)\, e^{-i(\underline{q}\underline{r}-\omega t)}$$

Anwenden des $\Box$-Operators

linke Seite der DGL $\qquad$ rechte Seite der DGL

$$\Box_{\underline{r},t}\, u(\underline{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \hat{u}(q,\omega)\, \underbrace{\Box_{\underline{r},t}\, e^{i(\underline{q}\underline{r}-\omega t)}}_{-\left(q^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)e^{i(\underline{q}\underline{r}-\omega t)}} = -\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \hat{f}(q,\omega)\, e^{i(\underline{q}\underline{r}-\omega t)}$$

Gleichung für Integranden

$$\Rightarrow \quad -\left(q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \hat{u}(q,\omega) = -\hat{f}(q,\omega)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{u}(q,\omega) = \frac{\hat{f}(q,\omega)}{\left(q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)}$$

Green'sche Funktion im Fourier-Raum

$$\rightarrow \quad \boxed{\hat{G}(q,\omega) = \frac{1}{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}}$$

Rücktransformation

$$u(r,t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; \hat{u}(q,\omega)\, e^{i(qr-\omega t)}$$

$\hat{f}(q,\omega)$ bekannt, wenn Quellen also $f(r,t)$ im Ortsraum bekannt sind

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; \frac{1}{\left(q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, f(r',t')\, e^{-i(qr'-\omega t')}}_{\hat{f}(q,\omega)} \; e^{i(qr-\omega t)}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} dr' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \underbrace{\left\{ \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; \frac{e^{iq(r-r') - i\omega(t-t')}}{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \right\}}_{G(r-r',\, t-t')} f(r',t')$$

Green'sche Funktion im Ortsraum

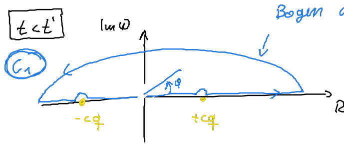
noch zu tun: Integral lösen

Problem: komplexe Integration

Komplexe Integration

$\boxed{\tau = t - t'}$

$\boxed{t < t'}$



Bogen darf keinen Beitrag zum Integral liefern

dann: Kreisintegral $\hat{=} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega$

$0 \le \varphi \le \pi$

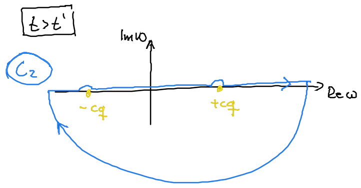
$\tau < 0$

$\rightarrow \left| e^{-i\omega(t-t')} \right|$ muss verschwinden auf Bogen

Bogen: $\omega = Re^{i\varphi}$, $d\omega = iRe^{i\varphi} d\varphi$

$$= \left| e^{-iR(\cos\varphi + i\sin\varphi)\tau} \right| = e^{R\underbrace{\sin\varphi}_{>0}\underbrace{\tau}_{<0}} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$\boxed{t > t'}$



$\tau > 0$

$\pi \le \varphi \le 2\pi$

$$\left| e^{-i\omega(t-t')} \right| = e^{R\underbrace{\sin\varphi}_{<0}\underbrace{\tau}_{>0}} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

- Integrand hat Pole bei $\pm cq$

$\rightarrow$ Green'sche Funktion wird eindeutig wenn der Integrationsweg um Pole festgelegt ist

① großer Halbkreis darf keinen Beitrag zum Integral liefern

② kleiner Halbkreis durch Kausalität bestimmt

[Zukunft von $f(r',t')$ darf nicht die Vergangenheit beeinflussen

$\rightarrow G(r-r', t-t') = 0$ für $t < t'$]

$\tau = t - t'$

Residuensatz

$$\Gamma(q,\tau) := \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \frac{e^{-i\omega\tau}}{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = \oint_C d\omega \, \frac{e^{-i\omega\tau}}{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = 2\pi i \sum_{\text{Pole}} \text{Res}$$

$\boxed{\tau<0}$ keine Pole im Inneren von C_1 $\longrightarrow \Gamma(q,\tau)=0 \longrightarrow G(r-r', t-t')=0$ Kausalität erfüllt ✓

$\boxed{\tau>0}$
$$\Gamma(q,\tau) = -2\pi i \sum_{\omega=\pm cq} \text{Res} \, \frac{e^{-i\omega\tau}}{-\frac{1}{c^2}(\omega - cq)(\omega + cq)} = \underbrace{2\pi i c^2 \left(\frac{e^{-icq\tau}}{2cq} + \frac{e^{icq\tau}}{-2cq} \right)}$$

Integration entlang C_2
(Umlauf ist math. negativ)

$$\Rightarrow G(\underline{r}-\underline{r}', \underbrace{t-t'}_{\tau}) = \frac{c}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3q \, e^{i\underline{q}\cdot(\underline{r}-\underline{r}')} \left(\frac{e^{-icq\tau} - e^{icq\tau}}{-2iq} \right)$$

Integration über q in Kugelkoordinaten

$$d^3q = q^2 dq \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta$$

$$\underline{q}\cdot\underbrace{(\underline{r}-\underline{r}')}_{s} = q \cdot s \cos\vartheta$$

Subst.: $y = \cos\vartheta$, $d\vartheta \sin\vartheta = dy$

$$\int d\vartheta \, e^{iqs\cos\vartheta} \sin\vartheta$$

$$G(\underline{r}-\underline{r}', \tau) = \frac{c}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dq \, q \, \frac{e^{-icq\tau} - e^{icq\tau}}{-2i} \underbrace{\int_{-1}^{1} d(\cos\vartheta) \, e^{iqs\cos\vartheta}}_{\frac{e^{iqs} - e^{-iqs}}{iqs}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}$$

Subst.: $\xi := cq$

$$= \frac{1}{2(2\pi)^2 s} \int_0^\infty d\xi \left\{ \underbrace{e^{i(\tau - \frac{s}{c})\xi} + e^{-i(\tau - \frac{s}{c})\xi}}_{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tau - \frac{s}{c})\xi} d\xi} \underbrace{- e^{i(\tau + \frac{s}{c})\xi} - e^{-i(\tau + \frac{s}{c})\xi}} \right\}$$

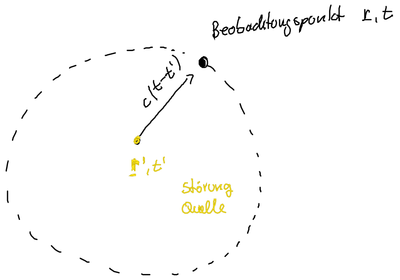
mit: $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, e^{ikx}$

$$= \frac{1}{4\pi s} \left\{ \delta\left(\tau - \frac{s}{c}\right) - \delta\left(\tau + \frac{s}{c}\right) \right\}$$

Ergebnis

$$\boxed{G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = \begin{cases} \frac{1}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|} \, \delta\left(t - t' - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right) & t > t' \\ 0 & t < t' \end{cases}}$$

retardierte Greenfunktion



δ - förmige Wellenfront breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit aus

Phys. Interpretation : $G(\overbrace{\underline{r}-\underline{r}'}^{s}, \overbrace{t-t'}^{\tau})$ ist das Potenzial $\phi(\underline{r},t)$, das von einer punktförmigen Ladungsdichte $\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \delta(\underline{r}-\underline{r}')\,\delta(t-t')$ am Ort $\underline{r}'$ zur Zeit t' erzeugt wird.

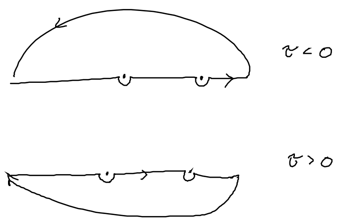
Für beliebige $\rho(\underline{r},t)$, $\underline{j}(\underline{r},t)$ ergeben sich die retardierten Potenziale : (durch Faltung)

$$\phi(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{\rho\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$\underline{A}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{\underline{j}\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$\phi, \underline{A}$ sind bestimmt durch $\underline{r}'$ zu den retardierten Zeiten $t' = t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}$ $\rightarrow$ endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der el.-magn. Felder mit c

NB : Für den Integrationsweg erhält man die avancierte Green'sche Funktion ($=0$ für $t > t'$)



- beschreibt eine einlaufende Kugelwelle die sich auf einen Punkt zusammen zieht.