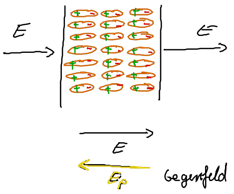
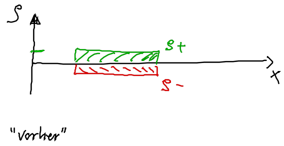
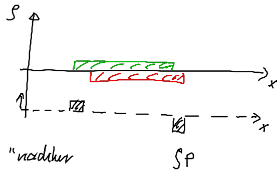
Wdh.: 5.1. Polarisation



$E' = E + E_P$





$\varepsilon_0 \nabla \cdot E_P = \rho_P$

Polarisation: $\underline{P}(\underline{r},t) := -\varepsilon_0 \, E_P(\underline{r},t)$

≙ makroskopische Dipoldichte

$$\Rightarrow \quad \nabla \cdot \underbrace{(\varepsilon_0 \underline{E}' + \underline{P})}_{\underline{D}} = \rho \quad \text{freie Ladungen}$$

Dielektrische Verschiebung, effektive Größe deren Quellen die freien Ladungen sind

5.2. Magnetisierung

- Mikroskopische Ursachen für den Magnetismus in Materie sind mikroskopische Kreisströme bzw. magnetische Dipolmomente $\underline{m}$:

(a) für $\underline{B} = 0$ vorhandene permanente magn. Momente $\underline{m}$ werden zur Minimierung der pot. Energie ausgerichtet

$$W_{magn} = -\underline{m} \cdot \underline{B}$$

→ paramagn. Verhalten ↑↑

(b) durch $\underline{B}$ werden nach Faradayschen Induktionsgesetz Kreisströme induziert

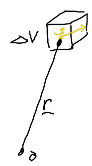
→ resultierendes B Feld antiparallel zu $\underline{B}$

(Lenz'sche Regel) ↑↓

→ diamagnetisches Verhalten

Mikroskopische Magnetisierung summiert über einzelne Dipole $\quad \underline{M}_m(\underline{r},t) = \sum_i \underline{m}_i(t)\, \delta(\underline{r} - \underline{r}_i)$

Mittelung über kleines Volumen: $\quad \underline{M}(\underline{r},t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3 s \; \underline{M}_m(\underline{r} + \underline{s}, t)$



makroskopische magn. Dipoldichte ≙ Magnetisierung $\underline{M}$

ΔV: mikroskopisch groß
makroskopisch klein

Ziel: Zusammenhang zwischen $\underline{M}$ und effektiven Feldern $\underline{B}$ in Materie

$$\nabla \times \underline{B}_M = \mu_0 \underline{j}_M \qquad \text{bzw.} \qquad \nabla \times \underline{M} = \underline{j}_M$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Gesamtfeld}}}{\underline{B}'} = \underline{B} + \underline{B}_M \quad \longrightarrow \quad \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0}\underline{B}'\right) = \underbrace{\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0}\underline{B}\right)}_{\substack{\text{freie Ströme}\\ \underline{j}}} + \underbrace{\underline{j}_M}_{\text{Ströme, die die Magnetisierung erzeugen}}$$

$$\underline{j} = \underline{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0}\underline{B}' - \underline{M}\right)$$

$$\boxed{\underline{j} = \underline{\nabla} \times \underline{H}}$$

$\underline{H}$: Feld dessen Wirbel die freien Ströme sind „Magnetfeld"

Betrachte Vektorpotenzial der mikroskopischen elektr. + magnetischen Dipole (siehe VL vom 27.11.) (wird erzeugt von den Dipolen)

$$\underline{A}_{\text{mikr}}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_i \left\{ \underbrace{\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}_i|}\dot{\underline{p}}_i\left(t-\frac{|r-r_i|}{c}\right)}_{\substack{A^{(0)}\\ A,\ \text{der el. Dipolstrahlung}}} + \underbrace{\nabla \times \left(\frac{1}{|r-r_i|}\underline{m}_i(t')\right)}_{\substack{A^{(1)}_{\text{magn}}\\ A,\ \text{der magn. Dipolstrahlung}}} \right\}$$

$$\left[t' = t - \frac{|r-r_i|}{c}\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \left\{ \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\dot{\underline{P}}_m(\underline{r}',t') + \nabla_r \times \left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}_i|}\underline{M}_m(\underline{r}',t')\right)\right\}$$

makroskopische Mittelung:

$$\underline{A}(\underline{r},t) = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} d^3s\ \underline{A}_{\text{mikr}}(\underline{r}+\underline{s},t)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \left\{ \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\dot{\underline{P}}(\underline{r}',t') + \nabla_r \times \left(\frac{1}{|r-r'|}\underline{M}(\underline{r}',t')\right)\right\}$$

(Mittelung und partielle Ableitungen vertauschen siehe VL vom 6.12.)

Def.: Magnetisierungsstromdichte $\underline{j}_M := \nabla \times \underline{M}$

Polarisierungsstromdichte $\underline{j}_P := \frac{\partial}{\partial t}\underline{P}$

$$\underline{A}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\left\{\underline{j}_P(r',t') + \underline{j}_M(r',t')\right\}$$

5.3. Maxwell Gleichungen in Materie

Potenziale des EM Feldes werden erzeugt von
- freien Ladungs- und Stromverteilungen $\rho, \underline{j}$
- Polarisations und Magnetisierungsbeiträgen $\rho_P, \underline{j}_M, \underline{j}_P$

$\underline{P}$: Polarisation $\hat{=}$ makroskopisch gemittelte Dipoldichte (Dipolmomente)
$\underline{M}$: Magnetisierung $\hat{=}$ makroskopisch gemittelte magn. Dipoldichte

$$\underline{A}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\left\{\underline{j}(r',t^{ret}) + \underline{j}_P(r',t^{ret}) + \underline{j}_M(r',t^{ret})\right\}$$

wobei $\underline{j}_M = \nabla\times\underline{M}$, $\underline{j}_P = \dot{\underline{P}}$

$$\phi(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\left\{\rho(\underline{r}',t^{ret}) + \rho_P(\underline{r}',t^{ret})\right\}$$

wobei $\rho_P = -\nabla\cdot\underline{P}$

$$\downarrow$$

$$\dot{\rho}_P = -\nabla\cdot\dot{\underline{P}} = -\nabla\cdot\underline{j}_P$$

Kontinuitätsgleichung für die Polarisationsladungen : $0 = \dot{\rho}_P + \nabla\underline{j}_P$

-> A, ϕ sind Lösungen der inhomogenen Wellengleichungen

$$\left.\begin{aligned} \Box\,\underline{A}(\underline{r},t) &= -\mu_0\left(\underline{j} + \underline{j}_P + \underline{j}_M\right) \\ \Box\,\phi(\underline{r},t) &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho + \rho_P\right)\end{aligned}\right\} \text{ Lorentz-Eichung}$$

- Für die Felder $\underline{E}, \underline{B}$ in Materie folgt:

$$\underline{E} := -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A} \qquad\qquad (1)\quad \nabla\times\underline{E} = -\dot{\underline{B}}$$

$$\underline{B} := \nabla\times\underline{A} \qquad \Rightarrow \qquad (2)\quad \nabla\cdot\underline{B} = 0 \qquad \text{wie im Vakuum}$$

- $$\nabla\cdot\underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\nabla\underline{A}}_{-\frac{1}{c^2}\dot{\phi}\ (\text{Lorentz Eichung})} - \nabla\cdot\nabla\phi = -\Box\phi$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho_P)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho - \nabla\cdot\underline{P}) \qquad \Rightarrow \qquad (3)\quad \nabla\cdot\left(\varepsilon_0\underline{E}(\underline{r},t) + \underline{P}(\underline{r},t)\right) = \rho(\underline{r},t)$$

$$\nabla\cdot\underline{D}(\underline{r},t) = \rho(\underline{r},t)$$

- $$\nabla\times\underline{B} = \nabla\times(\nabla\times\underline{A}) = \nabla(\underbrace{\nabla\underline{A}}_{-\frac{1}{c^2}\dot{\phi}}) - \Delta\underline{A}$$

$$= -\Delta\underline{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\nabla\phi}_{-\underline{E}-\frac{\partial}{\partial t}\underline{A}}$$

$$= -\Box\underline{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\underline{E}$$

$$= \mu_0 (\underline{j} + \underline{j}_P + \underline{j}_M) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}$$

$$= \mu_0 (\underline{j} + \dot{\underline{P}} + \nabla \times \underline{M}) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}$$

$$= \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P})}_{\underline{D}} + \mu_0 \nabla \times \underline{M} + \mu_0 \underline{j} \quad \longrightarrow \quad (4) \quad \nabla \times \overbrace{\left(\frac{1}{\mu_0} \underline{B} - \underline{M}\right)}^{\underline{H}} = \underline{j} + \frac{\partial}{\partial t} \underline{D}$$

Magnetfeld

$$\nabla \times \underline{H} = \underline{j} + \frac{\partial}{\partial t} \underline{D}$$

Zusammenfassung der Maxwellgleichungen in Materie

(1) $\nabla \times \underline{E} + \frac{\partial}{\partial t} \underline{B} = 0$

(2) $\nabla \cdot \underline{B} = 0$

$\Big\}$ WW mit Probeladungen

(3) $\nabla \cdot \underline{D} = \rho$

(4) $\nabla \times \underline{H} - \frac{\partial}{\partial t} \underline{D} = \underline{j}$

$\Big\}$ Erzeugung der Felder durch freie Ladungen und Ströme

- - - - - - - - - - - - -

(5) $\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$

(6) $\underline{H} = \frac{1}{\mu_0} \underline{B} - \underline{M}$

Die Feldgleichungen (1) – (6) sind nicht vollständig.
Ergänzung durch Materialgleichungen notwendig!

$\underline{P} \longleftrightarrow \underline{E}$

$\underline{M} \longleftrightarrow \underline{B}$

[zur Info im Gauß-System

$\nabla \times \underline{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underline{B} = 0$

$\nabla \cdot \underline{B} = 0$

$\nabla \cdot \underline{D} = 4\pi \rho$

$\nabla \times \underline{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \underline{D} = \frac{4\pi}{c} \underline{j}$

$\underline{D} = \underline{E} + 4\pi \underline{P}$

$\underline{H} = \underline{B} - 4\pi \underline{M}$]

Einfachste Materialgleichungen

(i) isotrope Materie $\longrightarrow$ $\underline{P} \uparrow\uparrow \underline{E}$ — skalarer Zusammenhang

$\underline{M} \uparrow\uparrow \underline{B}$ (paramagn.) oder $\underline{M} \uparrow\downarrow \underline{B}$ (diamagn.)

(ii) nicht zu hohe Felder $\longrightarrow$ $\underline{P} \sim \underline{E}$, $\underline{M} \sim \underline{B}$ — linearer Zusammenhang

(iii) keine Gedächtniseffekte, keine nichtlokale WW $\Big\}$ $\longrightarrow$ $\underline{P}(\underline{r}, t) \sim \underline{E}(\underline{r}, t)$, $\underline{M}(\underline{r}, t) \sim \underline{B}(\underline{r}, t)$ — instantaner, lokaler Zusammenhang

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \underline{P} &= \varepsilon_0 \chi_e \underline{E} \\ \underline{M} &= \chi_M \underline{H} \end{aligned}}$$

χ_e: elektrische Suszeptibilität
χ_M: magnetische Suszeptibilität
(Materialkonstanten)

- Die Materialkonstanten χ_e, χ_m müssen aus mikroskopischen Theorien bestimmt werden. (Festkörperphysik)

$$\begin{aligned} \underline{D} &= \varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P} \\ &= \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \underline{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \underline{E} \end{aligned}$$

mit $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ relative Dielektrizitätskonstante

$$\underline{B} = \mu_0 (\underline{H} + \underline{M}) = \mu_0 (1 + \chi_M) \underline{H} = \mu_0 \mu_r \underline{H}$$

mit $\mu_r = 1 + \chi_M$ relative Permeabilität

$$\underline{M} = \chi_M \underline{H} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi_M}{\mu_r} \underline{B} = \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\frac{\chi_M}{1 + \chi_M}}_{\substack{> 0 \text{ paramagnetisch} \\ < 0 \text{ diamagnetisch}}} \underline{B}$$