6.2. Vierervektoren und Minkowskiraum (Fortsetzung)

6.2.1. Formalisierung der Weltlinien

Der raum-zeitliche Abstand ds $\qquad (ds)^2 := (c\,dt)^2 - (d\underline{r})^2$

bleibt <u>invariant</u> bei Lorentz-Transformation zwischen Inertialsystemen.

- Schreibe $(ds)^2$ als Skalarprodukt von Vierervektoren (Zeit-Ort) im Minkowski-Raum V.
- stelle Lorentz-Trafo als <u>lineare</u> <u>orthogonale</u> Trafo in V dar, die das Skalarprodukt invariant lässt.

► Def.: <u>kontravariante</u> Komponenten des Vierervektors

$x^0 := ct$

x^i, $i=1,2,3$: kart. Komponenten des Ortsvektors $\underline{r}$

$\to (ds)^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$

nichteuklidisches Skalarprodukt! $\qquad$ (Euklidischer Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit euklid. Metrik

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \underbrace{(x\ y\ z)}_{\text{Zeilenvektor}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{metrischer Tensor}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{Spaltenvektor}}$$

$g_{ij} = \delta_{ij} = (\mathbb{1})_{ij}$)

hier: nichteuklidischer Raum V, $\boxed{\text{metr. Tensor}}$:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Damit lässt sich schreiben

$$(ds)^2 = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} dx^\mu g_{\mu\nu} dx^\nu \overset{\text{Einstein'sche Summenkonvention}}{=} dx^\mu g_{\mu\nu} dx^\nu = \boxed{dx^\mu dx_\mu = (ds)^2}$$

Vereinfachung durch $\quad dx_\mu := \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} dx^\nu$

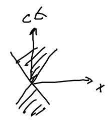
► Def.: <u>kovariante</u> Komponenten des Vierervektors

$$\boxed{\begin{aligned} x_0 &:= x^0 \\ x_i &:= -x^i \end{aligned}} \qquad i = 1,2,3$$

- Verallgemeinerung auf bel. Vierervektoren a^i: $\quad a_0 = a^0$, $\quad a_i = -a^i \quad (i=1,2,3)$

- Alle <u>Lorentz-Invarianten</u> lassen sich als Skalarprodukt $a^\mu a_\mu$ schreiben.
- <u>Zeitartige</u> Vierervektoren : $x^\mu x_\mu > 0$

(alle 0 erreichbare Weltvektoren



• Raumartige Vierervektoren : $x^\mu x_\mu < 0$

$\boxed{\text{Lorentz-Trafo}}$ (linear, homogen) : $\Sigma \to \Sigma'$

$$x'^\mu = U^\mu{}_\nu \, x^\nu \qquad \text{mit} \quad U^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\underline{v} \parallel x^1)$$

μ: Zeile, ν: Spalte

$$x'_\mu = g_{\lambda\mu} x'^\lambda = \underbrace{g_{\mu\lambda} U^\lambda{}_k \, g^{k\nu}}_{U_\mu{}^\nu} x_\nu \qquad U_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kontravariant $x^\nu \in V$
kovariant $x_\nu \in \tilde{V}$ duale Vektorraum zu V

„Heben oder Senken der Indizes durch $g^{\mu\nu}$ bzw. $g_{\mu\nu}$".

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu = \underbrace{dx^\nu g_{\nu\mu}}_{dx_\mu} \; \underbrace{dx^\mu}_{dx_\nu} = dx^\nu dx_\nu$$

Invarianz des Skalarproduktes :

$$\left.\begin{aligned} x'^\mu &= U^\mu{}_\nu \, x^\nu \\ x'_\mu &= U_\mu{}^\lambda \, x_\lambda \end{aligned}\right\} \quad \underbrace{x'^\mu x'_\mu}_{\text{in } \Sigma'} = \underbrace{U^\mu{}_\nu U_\mu{}^\lambda}_{\mathbb{1}} \, x^\nu x_\lambda \overset{!}{=} \underbrace{x^\nu x_\nu}_{\text{in } \Sigma}$$

$\left[U^\mu{}_\nu U_\mu{}^\lambda = (U^T)_\nu{}^\mu U_\mu{}^\lambda \right]$
Zeilen und Spalten vertauscht

$$U^T U = \mathbb{1}$$

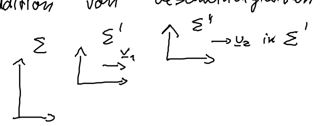
$$\boxed{U^T = U^{-1}} \quad \text{d.h. } U \text{ orthogonal.}$$

Also ist $U_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & & \\ \beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ die inverse Lorentz-Trafo zu $U^\nu{}_\mu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & & \\ -\beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$.

$(\beta \to -\beta)$

$U^{-1}(\beta) = U(-\beta)$

• Addition von Geschwindigkeiten :



$$\beta = \frac{v_1}{c}, \quad \alpha = \frac{v_2}{c} \quad \Rightarrow \quad \beta_{res} = \frac{v_{res}}{c} \overset{!}{=} \boxed{\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta} = \beta_{res}}$$

nichtrelativistischer Grenzfall $(\alpha, \beta \ll 1)$: $\beta_{res} = \alpha + \beta$ (Galilei)
hochrel. Grenzfall $(\alpha = 1)$: $\beta_{res} = \frac{1+\beta}{1+\beta} = 1$

• Die Lorentz-Trafo $U(\beta)$ zur Geschwindigkeit $v = \beta c$ bilden eine <u>Gruppe</u> (Lorentz-Gruppe) mit der Verknüpfung

$$U(\alpha) \cdot U(\beta) = U\left(\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}\right) \qquad \text{(Add. Theorem)}$$

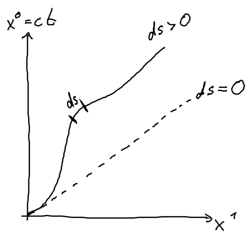
(Gruppenaxiome: (1) Assoziativgesetz $U(\beta_1)\big(U(\beta_2)U(\beta_3)\big) = \big(U(\beta_1)U(\beta_2)\big)U(\beta_3)$
(2) Es. ex. Einselement $U(0) = \mathbb{1}$
(3) Zu jedem $U(\beta)$ ex. eine Inverse $U(\beta^{-1}) = U(-\beta)$)

6.2.2. Relativistische Mechanik

Lorentz - invariante Formulierung der Mechanik mit Hilfe von Vierervektoren u. Skalaren (= Invarianten)

Vierervektoren: $x^\mu(t)$: Parametrisierung der Weltlinien (ct, x, y, z) durch t ungeeignet
da sich t bei Lorentz-Trafo ändert.

Def.: Eigenzeit = Zeit im momentanen Ruhesystem (vom Teilchen mitgeführte Uhr)
$\Rightarrow x^\mu(\tau)$



Bogenlänge der Weltlinie

$$\underline{ds} = (dx^\mu dx_\mu)^{1/2} = (c^2 dt^2 - (dr)^2)^{1/2}$$
$$= c\left[1 - \left(\frac{1}{c}\frac{dr}{dt}\right)^2\right]^{1/2} dt \qquad \beta = \frac{v}{c} = \frac{1}{c}\left|\frac{dr}{dt}\right|$$
$$= c(1-\beta^2)^{1/2} dt$$
$$= c\,\frac{dt}{\gamma}$$
$$= \underline{c\, d\tau}$$

Lorentz-Trafo für $dx = 0$
$d\tau = dt' = \frac{dt}{\gamma}$ (momentanes Ruhesystem)

$$\boxed{\tau = \frac{s}{c}}$$

Def.: Vierergeschwindigkeit $\boxed{u^\mu := \frac{dx^\mu}{ds}} = \frac{1}{c}\frac{dx^\mu}{d\tau}$

dimensionslos!

$$u^\mu u_\mu = \frac{dx^\mu dx_\mu}{(ds)^2} = \frac{(ds)^2}{(ds)^2} = 1$$

Lorentz-invariant, Einheitsvektor.
da Skalar

Komponenten $u^\mu = \frac{\gamma}{c}\frac{dx^\mu}{dt}$: $\boxed{\begin{array}{l} u^0 = \gamma \\ u^i = \frac{\gamma}{c} v^i = \frac{1}{c}\frac{dx^i}{d\tau} \end{array}}$ $\to 1$ nichtrelativ. Grenzfall $\beta \ll 1$
$\to \frac{1}{c} v^i$ Teilchengeschw.

Def.: Viererimpuls $\boxed{p^\mu := m_0 c\, u^\mu} = m_0 \frac{dx^\mu}{d\tau}$ mit Ruhemasse m_0

$$p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2 u^\mu u_\mu = m_0^2 c^2$$ Lorentz-Invariante

$$p^0 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = m(v)\, c = p_0$$

$$p^i = \frac{m_0 v^i}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = m(v)\, v^i = -p_i$$

mit geschwindigkeitsabhängiger Masse

$$\boxed{m(v) := \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}}$$

Physikalische Bedeutung von $\underline{p}^0$

Verallg. des Newton'sche Grundgesetz

$$\underline{F} = \frac{d}{dt}\underline{p} \qquad \text{(nicht Lorentz-invariant)}$$

auf rel. invariante Form:

► Def.: Viererkraft (Minkowski-Kraft)

$$\boxed{f^\mu := \frac{d}{d\tau} p^\mu} = m_0 c \frac{du^\mu}{d\tau} = m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$$

Leistungsbilanz

$$u^\mu u_\mu = 1 \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{d\tau}\left(u^\mu u_\mu\right) = 2 \underbrace{\frac{du^\mu}{d\tau}} u_\mu = 0$$

$$f^\mu u_\mu = 0$$

$$\Rightarrow \gamma \frac{d}{d\tau} p^0 + \frac{\gamma}{c} \sum_{i=1}^{3} f^i v_i = \frac{\gamma}{c}\left[\frac{d}{d\tau}(c p^0) - \underline{f}\cdot\underline{v}\right] = 0$$

Änderung der Energie — Leistung

► Def.: relativistische Energie

$$\boxed{E := c p^0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}} = m(v)\, c^2$$

somit $p^0 = \frac{E}{c}$ → Energie

und $f^0 = \frac{1}{c}\underline{f}\cdot\underline{v}$ Leistung mit $\underline{f} = (f^1, f^2, f^3)$

Relativistische Energie-Impuls Beziehung

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \underline{p}^2 = (m_0 c)^2$$

$$\longrightarrow \boxed{E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 \underline{p}^2}$$

Ruheenergie^2

- nichtrelativ. Grenzfall $|p| \ll m_0 c$

$$E = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}} \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{p^2}{2 m_0^2 c^2} + \dots\right)$$

$$E \approx m_0 c^2 + \frac{p^2}{2 m_0} + \dots$$

Ruheenergie — kin. Energie

$\underline{p} = 0$: $E = m_0 c^2$

→ Äquivalenz von Ruhmasse und Energie

- Hochrel. Grenzfall : $m_0 = 0$ (z.B. Photon)

$E = c|p|$, $p^\mu = (|p|, \underline{p})$ mit $p^\mu p_\mu = 0$

lichtartiger Vektor

$v = c \Rightarrow u^\mu$ nicht mehr definiert, da $\gamma \to \infty$

$\hat{=}$ für Photonen vergeht keine Eigenzeit