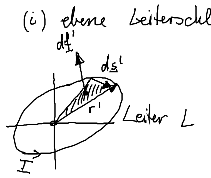
2.5. Magnetisches Dipolmoment

$$\underline{m} := \frac{1}{2}\int d^3r'\, \underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}')$$ <— magnetisches Dipolmoment

Dipolpotenzial (magn.) $\quad A^{(1)}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\, \underline{m} \times \underline{r}$

Beispiel: (i) ebene Leiterschleife L



$$(*) \quad d\underline{f}' = \frac{1}{2}\underline{r}' \times d\underline{s}'$$

$$d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}') = d\underline{s}'\, I$$ ($\underline{j}(\underline{r}') = 0$ überall wo L nicht ist)

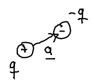
↑ Strom durch L

$$\underline{m} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, \underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}') = \frac{I}{2}\oint_L \underline{r}' \times d\underline{s}' \overset{(*)}{=} I \int_F d\underline{f} = \underline{\underline{I \cdot F \cdot \underline{n}}}$$

$\underline{n}$: Normale auf der von L eingeschl. Fläche

Ringstrom —> magn. Dipolmoment

[analog



$\underline{p} = \underline{a} \cdot q$]

(ii) Bewegte Ladungen

N Teilchen mit Masse m_i und Ladung q_i

spezifische Ladung $\frac{q_i}{m_i} = \frac{q}{m} = \text{const.}$

$$\rho(\underline{r}) = \sum_i q_i\, \delta(\underline{r} - \underline{r}_i)$$

$$\underline{j}(\underline{r}) = \sum_i q_i \underline{v}_i\, \delta(\underline{r} - \underline{r}_i)$$ mit Geschwindigkeit $\underline{v}_i = \frac{d\underline{r}_i}{dt}$

magn. Dipolmoment
$$\underline{m} = \frac{1}{2}\int d^3r'\, \underline{r}' \times \left(\sum_i q_i \underline{v}_i\, \delta(\underline{r}' - \underline{r}_i)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_i q_i\, (\underline{r}_i \times \underline{v}_i)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_i \frac{q_i}{m_i} \underbrace{m_i\, (\underline{r}_i \times \underline{v}_i)}_{\underline{L}_i} = \frac{q}{2m}\, \underline{L}$$

↑ Bahndrehimpuls

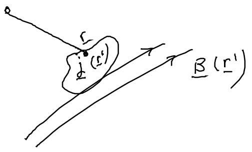
$$\boxed{\underline{m} = \frac{q}{2m}\underline{L}}$$ gilt auch für starre Körper

(aber nicht für Spin eines Elektrons
$\underline{m} = g\frac{e}{2m}\underline{S}$ mit $g \approx 2$ siehe QM)

2.6. Potenzial des magn. Dipols

$\underline{j}(\underline{r}') = \rho(\underline{r}')\,\underline{v}(\underline{r}')$ Stromverteilung im Feld einer magn. Induktion $\underline{B}(\underline{r}')$

externes Feld



$$\underline{F} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\,\underline{j}(\underline{r}') \times \underline{B}(\underline{r}')$$ Lorentz Kraft

Taylorentwicklung: (Probedipol im geg. $\underline{B}$)

$$\underline{B}(\underline{r}') = \underline{B}(\underline{r}) + \left[(\underline{r}'-\underline{r})\nabla_r\right]\underline{B}(\underline{r}) + \dots$$

$$\rightarrow \underline{F}(\underline{r}) = \underbrace{\left[\int d^3r'\,\underline{j}(\underline{r}')\right]}_{0} \times \underline{B}(\underline{r}) + \int d^3r'\,\underline{j}(\underline{r}') \times \left[(\underline{r}'-\underline{r})\nabla_r\right]\underline{B}(\underline{r}) + \dots$$

keine Monopole

$$= \int d^3r'\,\underline{j}(\underline{r}') \times \left[\underbrace{(\underline{r}'\nabla_r)\,\underline{B}(\underline{r})}_{\nabla_r(\underline{r}'\cdot\underline{B}(\underline{r}))}\right] - \underbrace{\int d^3r'\,\underline{j}(\underline{r}')}_{0} \times \left[(\underline{r}\cdot\nabla_r)\,\underline{B}(\underline{r})\right]$$

Annahme: $\nabla_r \times \underline{B}(\underline{r}) = 0$

externes Feld soll keine Stromwirbel im Bereich $j(r')$ haben

$$= \int d^3r'\,\underbrace{\underline{j}(\underline{r}') \times \nabla_r(\underline{r}'\cdot\underline{B}(\underline{r}))}_{-\nabla_r \times [(\underline{r}'\underline{B})\,\underline{j}(\underline{r}')] + (\underline{r}'\underline{B})\,\underbrace{(\nabla_r \times \underline{j}(\underline{r}'))}_{0}}$$

Letze VL

$$\int (\underline{r}' \times \underline{j}) \times \underline{r}\, d^3r' = \int (r'r)\, j(r')\, d^3r'$$

$$= -\nabla_r \times \left(\underline{m} \times \underline{B}(\underline{r})\right)$$

$$\underline{F} = (\underline{m}\cdot\nabla_r)\,\underline{B}(\underline{r}) = -\nabla_r\left(-\underline{m}\cdot\underline{B}(\underline{r})\right)$$

$$\rightarrow \boxed{V = -\underline{m}\cdot\underline{B}(\underline{r})}$$

Potenzielle Energie eines Dipols im Magnetfeld

[analog: $V = -\underline{p}\,\underline{E}(\underline{r})$ für elektr. Dipol im elektrischen Feld]

3. Maxwell Gleichung

<u>Ziel</u>: Dynamik der Felder

<u>Methode</u>: Erweiterung der elektrostatischen und magnetostatischen Feldgleichungen, so dass allgemeine <u>Invarianzprinzipien</u> erfüllt sind.

3.1 CPT – Invarianz

1955 Wolfgang Pauli
1954 Gerhard Lüders

: Jeder Vorgang bei dem Materie – Antimaterie
Raumspiegelung
Zeitumkehr

ausgeführt wird nun auch ein physikalisch möglicher Vorgang sein.

kann man zeigen unter den Vorraussetzungen: Kausalität
Lokalität
Lorentzinvarianz
H nach unten beschränkt.

<u>Diskrete Symmetrien</u>

Zeitumkehr	T	:	$t \to t' = -t$
Ladungsumkehr	C	:	$Q \to Q' = -Q$
Paritätsumkehr	P	:	$\underline{r} \to \underline{r}' = -\underline{r}$

(i) Zeitumkehr Transformation

$$T_g := \{T\text{-invariante Observablen } A : TA = A\}$$

$$= \left\{ \underline{r},\ d\underline{r},\ \underline{a} := \frac{d^2\underline{r}}{dt},\ m,\ q,\ \rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V},\ \underline{E} \right\}$$ "gerade" unter T.

$$T_u := \{A : TA = -A\}$$ „ungerade" unter T.

$$= \left\{ \underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt},\ \underline{j} = \rho \underline{v},\ \underline{B},\ \underline{A} \dots \right\}$$

$$\underset{T_u}{\underline{B}} = \underset{T_g}{\underline{\nabla}} \times \underset{T_u}{\underline{A}}$$

Anwenden von T auf statische Grundgleichungen

$$\begin{matrix} T: \\ C: \end{matrix} \left\{ \begin{aligned} \nabla \times \underline{E} &= 0 \\ \varepsilon_0 \nabla \cdot \underline{E} &= \rho \\ \nabla \times \underline{B} &= \mu_0 \underline{j} \\ \nabla \cdot \underline{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{aligned} -\nabla \times \underline{E} &= 0 \\ -\varepsilon_0 \nabla \cdot \underline{E} &= -\rho \\ --\nabla \times \underline{B} &= \overset{-}{-}\mu_0 \underline{j} \\ --\nabla \underline{B} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

invariant unter C
✓
invariant unter T

Kontinuitätsgleichung

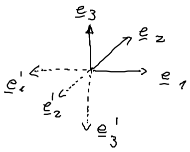
$$\begin{matrix} T \\ C \end{matrix} \left\{ \dot{\rho} + \nabla \underline{j} = 0 \right\} \longrightarrow \left\{ \overset{-}{-}\dot{\rho} \overset{-}{-} \nabla \cdot \underline{j} = 0 \right\}$$ ✓ ✓

forminvariant unter T.

(ii) Ladungskonjugation

$$C_g = \{ \underline{r}, \underline{v}, \underline{a}, \underline{F}, m \dots \} \quad \text{gerade unter } C$$
$$C_u = \{ \underline{E}, \rho, \underline{j}, \underline{B} \dots \} \quad \text{ungerade unter } C$$

(iii) Paritätsumkehr (räumliche Spiegelung, Inversion)



Rechtssystem

Linkssystem

$$P\underline{r} = -\underline{r} \qquad \text{„polarer Vektor"}$$

aber $P(\underline{a}\times\underline{b}) = -\underline{a}\times(-\underline{b}) = \underline{a}\times\underline{b}$ „axialer Vektor"

P-invariant

seien $\underline{a}, \underline{b}$ polare
$\underline{\omega}, \underline{\sigma}$ axiale
$\rightarrow$
$\underline{a}\times\underline{\omega}$ polar
$\underline{a}\times\underline{b}$ axial
$\underline{\omega}\times\underline{\sigma}$ axial
$\underline{a}\cdot\underline{b}$ Skalar $P(\underline{a}\cdot\underline{b}) = \underline{a}\cdot\underline{b}$
$\underline{a}\cdot\underline{\omega}$ Pseudoskalar $P(\underline{a}\cdot\underline{\omega}) = -\underline{a}\cdot\underline{\omega}$

$$P_g = \left\{ \begin{array}{ll} \text{Skalare} & m, q \\ \text{axiale Vektoren} & \underline{B} \end{array} \right\} \quad \text{gerade}$$

$$P_u = \left\{ \begin{array}{ll} \text{Pseudoskalare} & \nabla\cdot\underline{B} \\ \text{polare Vektoren} & \underline{r}, d\underline{r}, \underline{v}, \underline{a}, \underline{F}, \underline{E}, \underline{j}, \underline{A} \end{array} \right\} \quad \text{ungerade}$$

Grundgleichungen sind invariant unter P.

Idee: Forderungen an dynamische Gleichungen
(1) im statischen Grenzfall gelten bekannte Gleichungen
(2) Linear in $\underline{E}$, $\underline{B}$ (Superpositionsprinzip)
1. Ordnung in t (Kausalitätsprinzip)
zur Zeit $t=0$ soll Zustand für $t \to 0$ vollständig festgelegt sein
(3) CPT-Invarianz

Ansatz:
$$\nabla\times\underline{E} = \cancel{a_1}\,\dot{\underline{E}} + b_1\,\dot{\underline{B}}$$
$$\nabla\times\underline{B} - \mu_0\underline{j} = a_2\,\dot{\underline{E}} + \cancel{b_2}\,\dot{\underline{B}}$$

Symmetrie: T_g oder $P_g \longrightarrow a_1 = 0$
T_u oder $P_u \longrightarrow b_2 = 0$

Wert von b_1 und a_2?