6.3. Transformationsverhalten der Ströme und Felder

wir kennen bereits:

Zeit-Ortsvektoren (Weltlinien) $x^\mu = (ct, \underline{x})$ ← (kontra-varianter Vektor) aus Minkowski-Raum V

4-er Geschwindigkeit $u^\mu = (\gamma c, \gamma \underline{v})$

4-er Energie-Impuls $p^\mu = (E/c, \underline{p})$

4-er Kraft $f^\mu = (\gamma \frac{\underline{F}\cdot\underline{v}}{c}, \gamma \underline{F})$

noch zu tun: Strom, Potenziale, Felder

Transformationsverhalten unter Lorentz-Trafo:

$$x^{\mu'} = U^\mu{}_\nu \, x^\nu \qquad U^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(v \parallel x^1)$

↓ bestimmt, ob Vektor ko- oder kontravariant ist.

Bem: $U^\mu{}_\nu$ bildet ab von $V \to V$

metrischer Tensor: $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ bildet ab von $V \to \tilde{V}$

$$x_\mu' = U_\mu{}^\nu \, x_\nu \quad \text{mit} \quad U_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bem: $U_\mu{}^\nu$ von $\tilde{V} \to \tilde{V}$

$\hat{=}$ Transponierte Matrix von $U^\mu{}_\nu$

zusätzlich gilt wegen Invarianz des Skalarprodukts $U^{-1} = U^T$.

Ziel: Ko-/Kontravariante Formulierung der Elektrodynamik im Vakuum

Motivation/Grund: Klass. Elektrodynamik ist eine Lorentz-Invariante Theorie!

- gab den Anstoß für Einstein zur Formulierung der SRT

- Kontinuitätsgleichung für Ladungserhaltung:

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot \underline{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \partial_i j^i = 0$$

Forderung: Ladungserhaltung soll in allen Inertialsystemen gelten.
→ muss als 4-er Skalarprodukt formulierbar sein

1) 4-er Gradient:

$$(\partial_\mu) := \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$$

transformiert sich bei Lorentz-Trafo kovariant da:

$$\partial_\mu' f = [U^T] \partial_\nu f$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} f = \underbrace{\sum_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}}}_{U^{-1}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} f \qquad \text{(Kettenregel)}$$

Inverse Lorentz-Trafo

$$\left[\begin{array}{l} x^{\mu'} = U^\mu{}_\nu x^\nu \\ \dfrac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} = U^\mu{}_\nu \end{array}\right]$$

2) 4-er Ladungs & Stromdichte

$j^\mu := (c\varrho, \underline{j})$; das Transformationsverhalten ergibt sich über Definition von $\underline{j}$

$$\rightarrow \quad j^{\mu'} = U^\mu{}_\nu j^\nu$$

$$\hat{=} \left[\begin{array}{l} j^{0'} = \gamma(j^0 - \beta j^1) \\ j^{1'} = \gamma(j^1 - \beta j^0) \\ j^{2'} = j^2 \\ j^{3'} = j^3 \end{array}\right] \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \varrho' = \gamma(\varrho - \frac{v}{c^2} j^1) \\ j^{1'} = \gamma(j^1 - v\varrho) \end{array}$$

Für $v \neq 0$ "mischt" die Lorentz-Trafo Ladungsdichte und Komp. der Stromdichte

- Kontinuitätsgleichung : $\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}$

3) d'Alembert-Operator durch ko-/kontra-Varianten Gradienten ausdrücken

$$\Box := \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu} = -\partial_\mu \partial^\mu$$

[div] [grad]

$$\boxed{\Box = -\partial_\mu \partial^\mu}$$

4-er Potenziale

Die elektrodyn. Potenziale $\phi, \underline{A}$ sind (in der Lorenz-Eichung $\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2}\partial_t \phi = 0$)

$$\Box \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho \qquad \Box \underline{A} = -\mu_0 \underline{j} \qquad \text{mit } \mu_0 c = \frac{1}{\varepsilon_0 c}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_\mu \partial^\mu \phi = \dfrac{c\varrho}{\varepsilon_0 c} = \dfrac{1}{\varepsilon_0 c} j^0 \\ \partial_\mu \partial^\mu (cA^i) = \dfrac{1}{\varepsilon_0 c} j^i \end{array}\right. \qquad i = 1,2,3$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\partial_\mu \partial^\mu \phi^\nu = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^\nu} \qquad \text{mit} \quad \boxed{\begin{aligned}\phi^0 &= \phi \\ \phi^i &= c A^i\end{aligned}} \qquad i=1,2,3$$

4-er Potenzial

Da j^μ ein 4-Vektor, muss ϕ^ν wie auch wie ein 4-Vektor transformieren.
(da $\partial_\nu \partial^\mu$ Lorentz invariant)

$$\begin{aligned}
\phi'^0 &= \gamma(\phi^0 - \beta\phi^1) \\
\phi'^1 &= \gamma(\phi^1 - \beta\phi^0) \\
\phi'^2 &= \phi^2 \\
\phi'^3 &= \phi^3
\end{aligned}
\quad \hat{=} \quad
\begin{aligned}
\overset{\text{skalares Pot.}}{\phi'} &= \gamma(\phi - vA^1) \\
A'^1 &= \gamma\left(A^1 - \frac{v}{c^2}\phi\right)
\end{aligned}
\quad \hat{=} \quad \left(\phi'^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu \phi^\mu\right)$$

Zurück zur Lorenz-Eichung: $\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\overset{\text{skalares Pot.}}{\phi} + \nabla\cdot\underline{A} = 0$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\partial_\mu \phi^\mu = 0}, \qquad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Lorentz-invariant!

d.h. Lorenz-Eichung ist Lorentz-Invariant.
(im Gegensatz zur Coulomb Eichung)

Eichtransformationen mit skalaren ψ:

(Erinnerung: Maxwell-Gl. u Felder sind invariant gegenüber Eichtransformationen der Potenziale)

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{\underline{A}} &= \underline{A} + \nabla F \\
\tilde{\phi} &= \phi - \frac{\partial}{\partial t} F
\end{aligned}\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad
\begin{aligned}
\tilde{\phi}^i &= c\tilde{A}^i = cA^i + \partial_i(cF) \\
\tilde{\phi}^0 &= \phi^0 - \partial_0(cF)
\end{aligned}$$

$$\hat{=} \quad \boxed{\tilde{\phi}^\mu = \phi^\mu + \partial^\mu \psi}$$

mit beliebiger (Lorentz-inv) differenzierbaren skalaren-Fkt $\psi(x^\mu)$ des 4-er Vektors x^μ.

Felder $\underline{E}$, $\underline{B}$

$$\underline{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A} \quad \longrightarrow \quad E^i = -\partial_i \underbrace{\phi}_{\phi^0} - \underbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}}_{\partial_0} \underbrace{cA^i}_{\phi^i} = -\partial_i\phi^0 - \partial_0\phi^i = \partial^i\phi^0 - \partial^0\phi^i \qquad i=1,2,3$$

$$\underline{B} = \nabla\times\underline{A} \quad \longrightarrow \quad cB^1 = \partial_2 \underbrace{cA^3}_{\phi^3} - \partial_3 \underbrace{cA^2}_{\phi^2} = \partial_2\phi^3 - \partial_3\phi^2 = \partial^3\phi^2 - \partial^2\phi^3$$

zyklische Vertauschung

$$\begin{aligned}
cB^2 &= \partial^1\phi^3 - \partial^3\phi^1 \\
cB^3 &= \partial^2\phi^1 - \partial^1\phi^2
\end{aligned}$$

Zusammenfassung anti-symm. Feldtensor

$$\boxed{F^{\mu\nu} := \partial^\mu \phi^\nu - \partial^\nu \phi^\mu} \qquad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \qquad (\mu,\nu = 0,1,2,3)$$

(äquivalent zu 2 Maxwell-Gleichungen)

Zeile, Spalte

$$F^{\mu\nu} = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & \\ \end{array}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -cB^3 & cB^2 \\ E^2 & cB^3 & 0 & -cB^1 \\ E^3 & -cB^2 & cB^1 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

- Wegen der Antisymmetrie hat $F^{\mu\nu}$ nur 6 unabhängige Komponenten.

- Lorentz-Trafo der Felder: $F^{\mu\nu}$ ist Tensor 2. Stufe: $F'^{\mu\nu} = \underset{\text{Lorentz-Trafo}}{U^\mu{}_\lambda} U^\nu{}_k F^{\lambda k}$ $\qquad (v \parallel x^1)$

Im einzelnen: $\underline{\underline{E'^1}} = F'^{10} = U^1{}_\lambda U^0{}_k F^{\lambda k} = -\beta\gamma U^0{}_k F^{0k} + \gamma U^0{}_k F^{1k}$ $\qquad U^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$

$$= (\beta\gamma)^2 F^{01} + (\gamma)^2 F^{10} = \underbrace{\gamma^2(1-\beta^2)}_{1} F^{10} = \underline{\underline{E^1}}$$

$\vdots$

$$E'^2 = \gamma(E^2 - vB^3)$$
$$E'^3 = \gamma(E^3 + vB^2)$$

analog

$$B'^1 = B^1$$
$$B'^2 = \gamma\left(B^2 + \frac{v}{c^2} E^3\right)$$
$$B'^3 = \gamma\left(B^3 - \frac{v}{c^2} E^2\right)$$

- Elektrische und magnetische Felder werden beim Übergang zwischen verschiedenen Inertialsystemen ineinander transformiert.