Zusammenfassung Multipolentwicklung

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q_0}{r} + \frac{\underline{p}\,\underline{r}}{r^3} + \frac{\underline{r}\,\underline{\underline{Q}}\,\underline{r}}{r^5} + \dots\right.$$

für weit entfernte Ladungsverteilungen

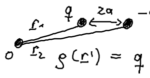
<u>Dipolmoment</u> $\underline{p} = \int d^3r'\,\rho(\underline{r}')\,\underline{r}'$

<u>Quadrupoltensor</u> $Q_{kl} = \int d^3r'\,\rho(r')\left(3x_k'x_l' - r'^2\delta_{kl}\right)$

spurfreier Tensor $\sum_i Q_{ii} = 0$

- in Diagonaldarstellung nur noch 2 unabhängige Komponenten

<u>Elementarer Dipol</u>

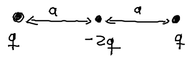


wobei $a \to 0$

$$\rho(\underline{r}') = q\left[\delta(\underline{r}'-\underline{r}_1) - \delta(\underline{r}'-\underline{r}_2)\right] = -p\frac{\partial}{\partial z'}\delta(\underline{r}')$$

$\underline{p} = 2q\,\underline{a}$

<u>Elementarer Quadrupol</u>



wobei $a \to 0$

$\to z$

$$\rho(\underline{r}') = \frac{Q_{33}}{4}\frac{\partial^2}{\partial z'^2}\delta(z')\,\delta(x')\,\delta(y')$$

<u>Feld eines Dipols:</u> $\underline{E} = -\nabla\phi$

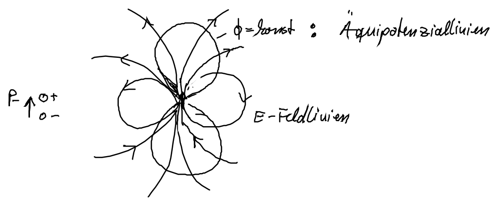
Summenkonvention $p_k x_k = \sum_k p_k x_k$

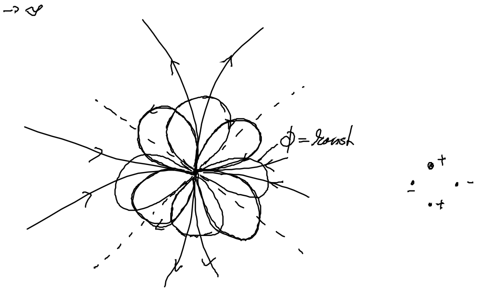
$$E_i = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\partial_i\frac{p_k x_k}{r^3}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3x_i p_k x_k}{r^5} - \delta_{ik}\frac{p_k}{r^3}\right)$$

$$\boxed{\underline{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^5}\left[3(\underline{p}\,\underline{r})\underline{r} - r^2\underline{p}\right]}$$

$\sim \frac{1}{r^3}$ für $r \to \infty$





<u>Bem</u>: Niedrigste nicht verschwindende Ordnung der Multipolentwicklung ist <u>nicht</u> vom Koord.-Ursprung abhängig. Alle höheren Ordnung sind abhängig vom Koord.Ursprg.

1.5 Elektrostatische Feldenergie

Kraft (Coulomb) $\underline{F}(\underline{r}) = q\,\underline{E}(\underline{r}) = -q\nabla\phi(\underline{r})$

$V(\underline{r}) = q\,\phi(\underline{r})$ ist die <u>potenzielle</u> Energie einer Ladung q im Feld $\underline{E}(\underline{r})$

$$W_{ij} = q_i\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|} = W_{ji}$$

pot. Energie der Ladung q_i bei $\underline{r}_i$ im Potenzial der Ladung q_j bei $\underline{r}_j$

Idee: Zusammenführung der Ladungen aus dem Unendlichen

Gesamte pot. Energie eines Systems von Ladungen $q_1, \dots$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} W_{ij} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|}$$

für kontinuierliche Ladungsverteilungen: $\qquad \rho(\underline{r}) = \sum_i q_i \, \delta(\underline{r} - \underline{r}_i)$

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, d^3r \, \frac{\rho(\underline{r}')\rho(\underline{r})}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

mit ① $\rho(\underline{r}) = \varepsilon_0 \, \mathrm{div}\, \underline{E}$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \, \phi(\underline{r}) \, \rho(\underline{r})$$

$$\overset{①}{=} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \, \phi(\underline{r}) \, \underline{\nabla} \cdot \underline{E}$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \left[\int_{\mathbb{R}^3} d^3r \, \nabla(\phi \underline{E}) - \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \, (\nabla\phi) \underline{E}(\underline{r}) \right]$$

$$\overset{\text{Gauß}}{=} \frac{\varepsilon_0}{2} \left[\underbrace{\int_{S_\infty} d\underline{f} \, \underset{\downarrow\, \sim r^{-1}}{\phi} \, \underset{\downarrow\, r^{-2}}{\underline{E}}}_{0} + \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \, (\underline{E}(\underline{r}))^2 \right]$$

$$= \int d^3r \, \omega(\underline{r})$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Energiedichte des elektrischen Feldes} \\ \omega(\underline{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2} (\underline{E}(\underline{r}))^2 \end{array}}$$

Selbstenergie einer Punktladung bei $\underline{r} = 0$

$$|\underline{E}(\underline{r})| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad \omega(\underline{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{1}{r^4}$$

Gesamtenergie $\quad W = \int d^3r \, \omega(r) = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 4\pi \int_0^\infty dr \, r^2 \frac{1}{r^4} \sim \int_0^\infty \frac{dr}{r^2} \sim \frac{1}{r}$

divergiert bei $r = 0$!

- Begriff der Punktladung ist im Widerspruch zum Feldtheoretischen Begriff der Energiedichte

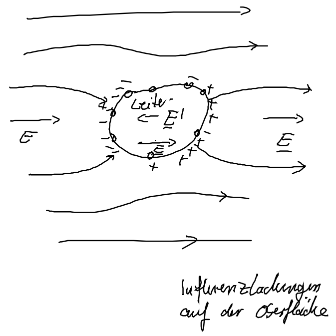
besser Energie direkt dem Feld zuordnen.

Grund: Selbstenergie beim Übergang zum Integral nicht ausgeschlossen.

- Energie einer Ladungsvert. im ex. Feld $\qquad W_{ext} = \int d^3r \, \rho(\underline{r}) \, \phi_{ext}(\underline{r})$

ohne Faktor $\frac{1}{2}$!

1.6. Leiter in der Elektrostatik



Elektrische Leiter = Materie mit quasi-frei beweglichen Ladungen

El. Feld $\underline{E}(\underline{r})$ im Inneren eines Leiters übt Kraft $\underline{F} = q\underline{E}$ auf bewegliche Ladungen aus

$\overset{\oplus\rightarrow}{\underset{\underline{E}}{\longrightarrow}}$ $\overset{\leftarrow\ominus}{\underset{\underline{E}}{\longrightarrow}}$ Ladungen werden verschoben

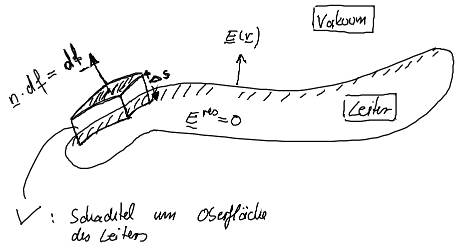
-> kompensierendes Gegenfeld $\underline{E}'$ wird aufgebaut bis $\underline{F} = 0$ d.h. $\underline{E}' + \underline{E} = 0$

=> $\underline{E}^{res}(\underline{r}) = 0$ -> $\phi(r) = const$ im inneren eines Leiters konstant -> $\rho(\underline{r}) = 0$ im Inneren des Leiter

$(\underline{E} = -\nabla\phi = 0)$ $\qquad$ $\operatorname{div} \underline{E} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$

-> Leiter ist Äquipotenzialfläche

Allgemein gilt: $\underline{E}(\underline{r}) \perp \phi(\underline{r}) = const$



Flächenladungsdichten auf Leiteroberflächen

$$\underbrace{\varepsilon_0 \int_{\partial V} d\underline{f}\, \underline{E}(\underline{r})}_{①} = \underbrace{\int_V d^3r\, \rho(\underline{r})}_{②}$$

Gauß'sches Gesetz + Satz von Gauß

$V = df \cdot \Delta s$ mit $df \to 0$, $\Delta s \to 0$

① $\varepsilon_0 \int_{\partial V} d\underline{f}\, \underline{E}(\underline{r}) \longrightarrow \varepsilon_0\, df\, \underbrace{\underline{n}\, \underline{E}}_{E}$

n Normalenkomponente
$\underline{n} \parallel \underline{E}$

alle äußeren Beiträge der "Schachtel" um Oberfläche verschwinden außer dieser Anteil.

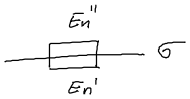
② $\int_V d^3r\, \rho(r) \to \underbrace{df\, \Delta s}_{"V"}\, \rho(r)$, $\quad \overbrace{\Delta s\, \rho(r)}^{\sigma(r)}$

$\sigma(\underline{r})$ Flächendichte

-> $\varepsilon_0\, df\, \underline{n}\underline{E} = df\, \sigma(r)$

-> $\boxed{\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\underline{r}) \cdot \underline{n}}$ auf Leiteroberfläche

Allgemein gilt für Flächenladungen

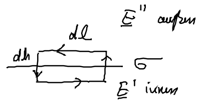


$$\underbrace{E_n'' - E_n'}_{} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\underline{r})$$

Flächendivergenz

$\boxed{\text{Sprung der Normalkomponente von } \underline{E}}$ beim Durchgang durch geladene Oberfläche!

Tangentialkomponente von $\underline{E}$?



$$\oint_{\partial F} \underline{E}\, d\underline{s} \overset{\text{Stokes}}{=} \int_F \nabla \times \underline{E}\, d\underline{f} \overset{\text{rot}\,\underline{E}=0}{=} 0$$

$F = dl \cdot dh$ mit $dl \to 0$, $dh \to 0$

$$\left(E_t'' - E_t'\right) dl = 0$$

$\boxed{E_t'' - E_t' = 0}$ Tangentialkomponenten sind stetig!