Zusammenfassung Multipolentwicklung

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q_0}{r} + \frac{\underline{p}\,\underline{r}}{r^3} + \frac{\underline{r}\,\underline{\underline{Q}}\,\underline{r}}{r^5} + \dots\right]$$

für weit entfernte Ladungsverteilungen

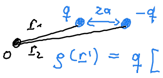
Dipolmoment $\underline{p} = \int d^3r' \rho(\underline{r}')\,\underline{r}'$

Quadrupoltensor $Q_{k\ell} = \int d^3r' \rho(r')\left(3x_k'x_\ell' - r'^2\delta_{k\ell}\right)$

Spurfreier Tensor $\sum_i Q_{ii} = 0$

- in Diagonaldarstellung nur noch 2 unabhängige Komponenten

Elementarer Dipol

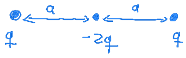


wobei $a \to 0$

$\rho(\underline{r}') = q\left[\delta(\underline{r}'-\underline{r}_1) - \delta(\underline{r}'-\underline{r}_2)\right] = -p\frac{\partial}{\partial z'}\delta(\underline{r}')$

$\underline{p} = 2q\,\underline{a}$

Elementarer Quadrupol



wobei $a \to 0$ $\to z$

$\rho(\underline{r}') = \frac{Q_{33}}{4}\frac{\partial^2}{\partial z'^2}\delta(z')\,\delta(x')\,\delta(y')$

Feld eines Dipols: $\underline{E} = -\nabla\phi$

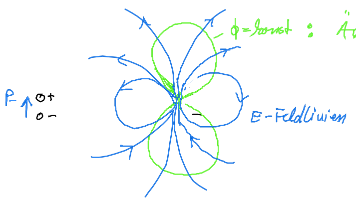
Summenkonvention $p_k x_k = \sum_k p_k x_k$

$$E_i = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\partial_i \frac{p_k x_k}{r^3}$$

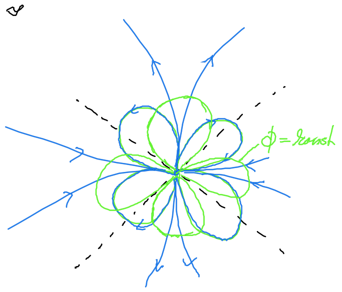
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3x_i p_k x_k}{r^5} - \delta_{ik}\frac{p_k}{r^3}\right)$$

$$\boxed{\underline{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^5}\left[3(\underline{p}\,\underline{r})\underline{r} - r^2\underline{p}\right]}$$

$\sim \frac{1}{r^3}$ für $r \to \infty$



Quadrupol



Bem: Niedrigste nicht verschwindende Ordnung der Multipolentwicklung ist nicht vom Koord.-Ursprung abhängig. Alle höheren Ordnung sind abhängig vom Koord. Ursprg.

1.5 Elektrostatische Feldenergie

Kraft (Coulomb) $\underline{F}(\underline{r}) = q\,\underline{E}(\underline{r}) = -q\nabla\phi(\underline{r})$

$V(\underline{r}) = q\,\phi(\underline{r})$ ist die potenzielle Energie einer Ladung q im Feld $E(\underline{r})$

$W_{ij} = q_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|} = W_{ji}$ pot. Energie der Ladung q_i bei $\underline{r}_i$ im Potenzial der Ladung q_j bei $\underline{r}_j$

Idee: Zusammenführung der Ladungen aus dem Unendlichen

Gesamte pot. Energie eines Systems von Ladungen $q_1, \dots$

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} W_{ij} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i\neq j}\frac{q_i q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|}$$

für kontinuierliche Ladungsverteilungen: $\rho(\underline{r}) = \sum_i q_i\,\delta(\underline{r} - \underline{r}_i)$

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, d^3r\, \frac{\rho(\underline{r}')\rho(\underline{r})}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

mit ① $\rho(\underline{r}) = \varepsilon_0 \operatorname{div} \underline{E}$

$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r\, \phi(r)\, \rho(r)$$

$$\overset{①}{=} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{\mathbb{R}^3} d^3r\, \phi(r)\, \underline{\nabla}\cdot\underline{E}$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\int_{\mathbb{R}^3} d^3r\, \nabla(\phi \underline{E}) - \int_{\mathbb{R}^3} d^3r\, (\nabla\phi)\,\underline{E}(\underline{r})\right]$$

$$\overset{\text{Gauß}}{=} \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\underbrace{\int_{S_\infty} d\underline{f}\, \underset{\sim r^{-1}}{\phi}\, \underset{r^{-2}}{\underline{E}}}_{0} + \int_{\mathbb{R}^3} d^3r\, (\underline{E}(\underline{r}))^2\right]$$

$$= \int d^3r\, w(r)$$

$$\boxed{\text{Energiedichte des elektrischen Feldes} \quad w(r) = \frac{\varepsilon_0}{2}(\underline{E}(\underline{r}))^2}$$

Selbstenergie einer Punktladung bei $\underline{r} = 0$

$$|\underline{E}(\underline{r})| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad w(\underline{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{1}{r^4}$$

Gesamtenergie $W = \int d^3r\, w(r) = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 4\pi \int_0^\infty dr\, r^2 \frac{1}{r^4} \sim \int_0^\infty \frac{dr}{r^2} \sim \frac{1}{r}$

divergiert bei $r = 0$!

- Begriff der Punktladung ist im Widerspruch zum Feldtheoretischen Begriff der Energiedichte

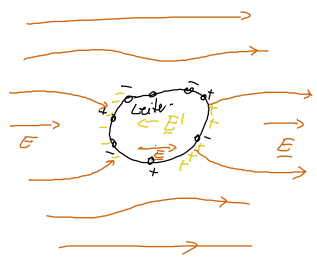
besser: Energie direkt dem Feld zuordnen.

Grund: Selbstenergie beim Übergang zum Integral nicht ausgeschlossen.

- Energie einer Ladungsvert. im ex. Feld $\quad W_{ext} = \int d^3r\, \rho(\underline{r})\, \phi_{ext}(\underline{r})$

ohne Faktor $\frac{1}{2}$!

1.6. Leiter in der Elektrostatik



Elektrische Leiter = Materie mit quasi-frei beweglichen Ladungen

El. Feld $\underline{E}(\underline{r})$ im Inneren eines Leiters übt Kraft $\underline{F} = q\underline{E}$ auf bewegliche Ladungen aus

$\underset{\underline{E}}{\xrightarrow{\oplus\to}}$ $\underset{\underline{E}}{\xrightarrow{\leftarrow\ominus}}$ Ladungen werden verschoben

Influenzladungen auf der Oberfläche

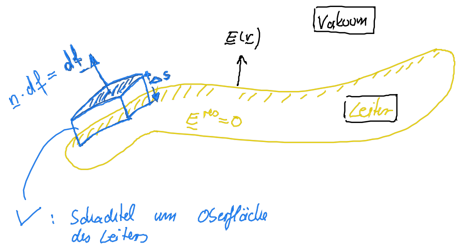
→ kompensierendes Gegenfeld $\underline{E}'$ wird aufgebaut bis $\underline{F} = 0$ d.h. $\underline{E}' + \underline{E} = 0$

$\Rightarrow E^{res}(\underline{r}) = 0$ → $\phi(r) = const$ im inneren eines Leiters konstant → $\rho(\underline{r}) = 0$ im Inneren des Leiter

$(\underline{E} = -\nabla\phi = 0)$ $\quad \mathrm{div}\, E = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$

→ Leiter ist Äquipotenzialfläche

Allgemein gilt : $\underline{E}(\underline{r}) \perp \phi(\underline{r}) = const$



Flächenladungsdichten auf Leiteroberflächen

$$\underbrace{\varepsilon_0 \int_{\partial V} d\underline{f}\, \underline{E}(\underline{r})}_{①} = \underbrace{\int_V d^3r\, \rho(\underline{r})}_{②}$$

Gauß'sches Gesetz + Satz von Gauß

$V = df \cdot \Delta s$ mit $\begin{array}{l} df \to 0 \\ \Delta s \to 0 \end{array}$

① $\varepsilon_0 \int_{\partial V} d\underline{f}\, \underline{E}(\underline{r}) \longrightarrow \varepsilon_0\, df\, \underbrace{\underline{n}\,\underline{E}}_{E}$ $\quad$ n Normalenkomponente $\quad \underline{n} \parallel \underline{E}$

alle äußeren Beiträge der "Schachtel" um Oberfläche verschwinden außer dieser Anteil.

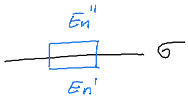
② $\int_V d^3r\, \rho(r) \to \underbrace{df \Delta s}_{"V"}\, \rho(r)$ $\quad \overbrace{\Delta s\, \rho(r)}^{\sigma(r)}$

$\sigma(\underline{r})$ Flächendichte

$\to \varepsilon_0\, df\, \underline{n}\underline{E} = df\, \sigma(r)$

$$\to \boxed{\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\underline{r}) \cdot \underline{n}} \quad \text{auf Leiteroberfläche}$$

Allgemein gilt für Flächenladungen

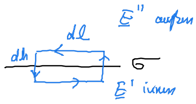


$$\underbrace{E_n'' - E_n'}_{} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\underline{r})$$

Flächendivergenz

$\boxed{\text{Sprung der Normalkomponente von } \underline{E}}$ beim Durchgang durch geladene Oberfläche !

Tangentialkomponente von $\underline{E}$?



$$\oint_{\partial F} \underline{E}\, d\underline{s} \overset{\text{Stokes}}{=} \int_F \nabla \times \underline{E}\, d\underline{f} \overset{\text{rot}\,\underline{E}=0}{=} 0$$

$F = dl \cdot dh$ mit $dl \to 0$, $dh \to 0$

$$(E_t'' - E_t')\, dl = 0$$

$$\boxed{E_t'' - E_t' = 0}$$

Tangentialkomponenten sind stetig !