6.5. Relativistisches Hamiltonprinzip

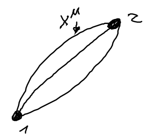
Ziel: Formulierung der Elektrodynamik als Lagrange'sche Feldtheorie.
d.h. Herleitung der Bewegungsgleichungen (Maxwell-Gl.) aus einer Lagrangedichte.

① • Die relativistische Dynamik eines freien Massenpunktes lässt sich aus dem Extremalprinzip herleiten.

$$\delta W = 0 \qquad \left[W = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt \qquad \text{(Wirkung)} \right]$$

$$W \sim \int_1^2 ds \qquad \text{Wirkungsintegral} \; ; \; ds = \frac{c}{\gamma}\,dt \qquad \text{lorentzinvariant}$$

1, 2 : Anfangs- und Endpunkt im 4-Raum . $\delta x^\mu \big|_{1,2} = 0$



Bedingungen: – W muss Lorentz-Skalar sein
– W darf Bahnlinie x^μ nicht explizit enthalten
– Linear im Potenzial
– Grenzfall $\beta \ll 1$ muss Newtonsche Mechanik liefern

Newtonsche Mechanik im Limit $\beta \ll 1$

$$W = \alpha \int_1^2 ds = \alpha c \int_{t_1}^{t_2} (1-\beta^2)^{1/2}\,dt \qquad \sqrt{1-\beta^2} \approx 1 - \tfrac{1}{2}\beta^2$$

$$\approx \alpha c \int_{t_1}^{t_2} \left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) dt$$

für $\alpha c = -m_0 c^2$ ergibt sich:

$$\approx \int_{t_1}^{t_2} \big(\underbrace{-m_0 c^2}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{\frac{m_0}{2} v^2}_{\text{kinetische Energie}}\big)\,dt$$

$L = -m_0 c^2 + \frac{m_0}{2} v^2$

Lagrange-Funktion für freien Massepunkt

② WW eines Massenpunktes mit einem 4-Vektor-Feld $\varphi^\mu(x^\nu)$

$$W = \int_1^2 \Big\{ -m_0 c\,ds - \underbrace{\varphi^\mu dx_\mu}_{\text{Lorentz-Invariante}} \Big\}$$

← möglicher Ansatz

zu zeigen: Lorentz-Kraft steht in der Bewegungsgleichung

Variation:

$$\delta W = \int_1^2 \Big\{ -m_0 c\, \delta(ds) - \overbrace{\delta(\varphi^\mu dx_\mu)}^{(\mathrm{I})} \Big)$$

$$\delta(ds) = \delta\left(dx^\mu dx_\mu\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\,\frac{d(\delta x^\mu)\cdot dx_\mu + dx^\mu \cdot (d(\delta x_\mu))}{ds}$$

$$\left[\begin{array}{l} \tau := \frac{s}{c} \\ u^\mu := \frac{dx^\mu}{ds} \end{array}\right]$$

$$= \frac{dx^\mu}{ds}\, d(\delta x_\mu) \qquad \left[\ (d(\delta x^\mu))\,dx_\mu = dx^\mu\,(d(\delta x_\mu))\ \right]$$

4-Geschwindigkeit

$$= u^\mu d(\delta x_\mu)$$

$$(\mathrm{I}):\ \delta(\varphi^\mu dx_\mu) = \delta\varphi^\mu dx_\mu + \varphi^\mu d(\delta x_\mu)$$

$$\Rightarrow \delta W = \int_1^2 \Big\{ \underbrace{-m_0 c\, u^\mu d(\delta x_\mu)}_{①} - \underbrace{\delta\varphi^\mu dx_\mu}_{③} - \underbrace{\varphi^\mu d(\delta x_\mu)}_{②} \Big) \qquad \int u'v = [uv] - \int v'u$$

Partielle Integration: ① $\underbrace{\left[-m_0 c\, u^\mu \delta x_\mu\right]_1^2}_{0} + \int_1^2 m_0 c\,(d u^\mu)\,\delta x_\mu = -\int_1^2 m_0 c\, u^\mu d(\delta x_\mu)$

② $\underbrace{\left[-\varphi^\mu \delta x_\mu\right]_1^2}_{0} + \int (d\varphi^\mu)\,\delta x_\mu = -\int \varphi^\mu d(\delta x_\mu)$

da Anfangs- und Endpunkte nicht verändert werden $\to 0$

③: $d\varphi^\mu = \partial^\nu \varphi^\mu dx_\nu$ (totales Differenzial)
$= \partial^\nu \varphi^\mu u_\nu ds$

$$\delta\varphi^\mu = \partial^\nu \varphi^\mu \delta x_\nu \quad \to \quad \boxed{\delta\varphi^\mu dx_\mu} = \partial^\nu \varphi^\mu \delta x_\nu dx_\mu \overset{\mu \leftrightarrow \nu}{=} \partial^\mu \varphi^\nu \delta x_\mu dx_\nu = \partial^\mu \varphi^\nu u_\nu \delta x_\mu ds$$

Einsetzen von ①, ②, ③

$$\Rightarrow \delta W = \int_1^2 ds \left\{ m_0 c \frac{du^\mu}{ds} - \left(\partial^\mu \varphi^\nu - \partial^\nu \varphi^\mu\right) u_\nu \right\} \delta x_\mu$$

da $\delta W = 0$ für beliebige Variationen von δx_μ gilt, folgt:

$$\boxed{m_0 c \frac{du^\mu}{ds} = \underbrace{(\partial^\mu \varphi^\nu - \partial^\nu \varphi^\mu)}_{f^{\mu\nu} := \partial^\mu \varphi^\nu - \partial^\nu \varphi^\mu} u_\nu = f^{\mu\nu} u_\nu}$$

rel. Bewegungsgleichung eines Massenpunktes mit Ruhemasse m_0 und Ladung q unter dem Einfluss der Lorentzkraft.

wir kennen: $p^\mu = m_0 c\, u^\mu$

wir setzen: $f^{\mu\nu} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu}$ ← Feldstärketensor

$\varphi^\mu = \frac{q}{c} \phi^\mu$ ← 4-Potenzial

$$\boxed{\frac{d}{ds}p^\mu = \frac{q}{c}F^{\mu\nu}u_\nu}$$

- die 3 Ortskomponenten:

$$\frac{d}{ds}p^1 = \frac{q}{c}\Big(\underbrace{F^{10}}_{E^1}\underbrace{u_0}_{\gamma} + \underbrace{F^{11}u_1}_{0} + \underbrace{F^{12}u_2}_{-cB^3\frac{\gamma}{c}v_2} + \underbrace{F^{13}u_3}_{cB^2\frac{\gamma}{c}v_3}\Big)$$

$$ds = \frac{c}{\gamma}dt$$

$$= \frac{q}{c}\Big(+E^1\gamma - cB^2\frac{\gamma}{c}v_3 + cB^3\frac{\gamma}{c}v_2\Big)$$

$$\boxed{\frac{d}{ds}p^1 = \frac{q}{c}F^{1\mu}u_\mu}$$

$$\frac{d}{dt}(\underline{p})_1 = q\big((\underline{E})_1 + (\underline{v}\times\underline{B})_1\big) \qquad \big(v_2B_3 - v_3B_2 = (\underline{v}\times\underline{B})_1\big)$$

<u>ABER</u>: Linke Seite enthält die bewegte Masse.

- <u>bekannte</u> Bewegungsgleichung mit Lorentzkraft.

- Zeitkomponente ergibt $\mu = 0$

$$\frac{\gamma}{c^2}\frac{dE}{dt} = \frac{d}{ds}\Big(\overbrace{\frac{E}{c}}^{p^0}\Big) = \frac{q}{c}\big(F^{01}u_1 + F^{02}u_2 + F^{03}u_3\big)$$

ko-Variante Geschw.

$$= q\frac{\gamma}{c^2}\big(\underbrace{E^1v^1 + E^2v^2 + E^3v^3}_{\underline{E}\cdot\underline{v}}\big)$$

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = q\,\underline{E}\cdot\underline{v}}$$ Leistungsbilanz

(nur elektrisches Feld ändert die Energie)

$\Rightarrow$

$$\delta W = \delta\int_1^2 \overbrace{\Big(-m_0c\,ds - \frac{q}{c}\phi^\mu dx_\mu\Big)}^{L\,dt = (L_{frei} + L_{Feld-Masse})\,dt} = 0$$

ergibt Bewegungsgl. und Leistungsbilanz

$$L_{Feld-Masse}\,dt = -\frac{q}{c}\phi^\mu dx_\mu = (-q\phi - q\underline{v}\underline{A})\,dt$$

$$\boxed{L_{Feld-Masse} = -q\phi - q\,\underline{v}\cdot\underline{A}}$$ Lagrange-Funktion

<u>6.6. Eichinvarianz und Ladungserhaltung</u>

Wirkungsintegral
$$W = \underbrace{-m_0c\int_1^2 ds}_{\substack{W_t \\ \text{(Teilchen)}}} \underbrace{- \frac{q}{c}\int_1^2 dx_\nu\,\phi^\nu}_{\substack{W_{tf} \\ \text{(Teilchen-Feld-WW)}}}$$

Verallgemeinerung auf kont. Massendichte $\mu(x^\nu)$:

$$W_t = -c\int d^3r\,\mu \int_1^2 ds = -\int_\Omega d\Omega\, \mu \frac{ds}{dt}$$

$$d\Omega := d^3r\, c\, dt = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$$ Volumenelement im Minkowski-Raum

(i) $d\Omega$ ist eine Lorentz-Invariante, da das Volumen unter orthogonalen Transformationen $U^\nu{}_\kappa$ erhalten wird.

(ii) $$dm_0\, dx^\nu = \frac{\mu}{c}\frac{dx^\nu}{dt}\underbrace{d^3r\, c\, dt}_{d\Omega} = \frac{1}{c}\mu \frac{dx^\nu}{dt} d\Omega$$

=> die 4-er Massenstromdichte $\boxed{\mu \frac{dx^\nu}{dt} \equiv g^\nu}$ ist ein 4-Vektor, da $dm_0, d\Omega$ Lorentz Skalare sind

(iii) $$\underbrace{\mu^2 \frac{dx^\nu dx_\nu}{dt^2}}_{g^\nu g_\nu} = \left(\mu \frac{ds}{dt}\right)^2$$ ist Lorentz-Invariante also auch $\mu \frac{ds}{dt}$.

=> W_t ist Lorentz-Invariante.

WW einer kontinuierliche Ladungsverteilung $\varrho(x^\nu)$ mit Feld:

$$W_{tf} = -\frac{1}{c}\int d^3r\, \varrho \int dx_\nu\, \phi^\nu$$

$$\boxed{W_{tf} = -\frac{1}{c^2}\int_\Omega d\Omega\, j_\nu\, \phi^\nu}$$