Tutorium Fr. 14–16 Uhr entfällt!!

5. Materie in elektrischen und magnetischen Feldern

5.1 Polarisation

Materie enthält mikroskopische elektrisch geladene Bausteine (Elektronen, Kerne, Ionen, usw.....)

i) freie Ladungsträger (Elektronen in Metallen, Elektronen + Löcher in Halbleitern)

(→ Beschleunigung in äußeren (elektr./magn.) Feldern!)

- $\underline{F} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$

→ el. Ströme → Beschreibung der Materialeigenschaft durch die Leitfähigkeit σ

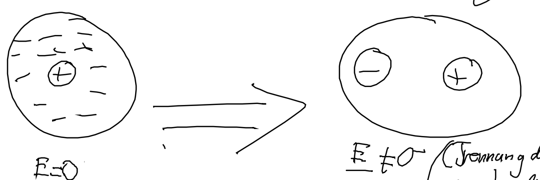
ii) gebundene Ladungen (in Isolatoren)

→ Polarisation im externen $\underline{E}$-Feld!

(a) für $\underline{E}$(extern) vorhandene mikroskopische Dipole $\underline{p}$ werden zur Minimierung der pot. Energie $W_d = -\underline{p}\,\underline{E}$ vorzugsweise (gegen die zufällige thermische Bewegung) $\uparrow\uparrow \underline{E}$ orientiert!

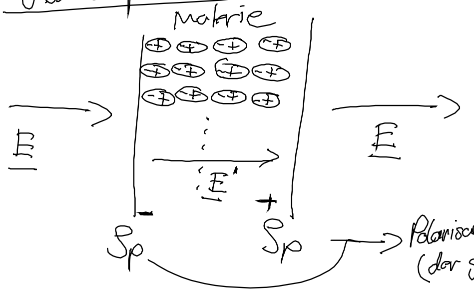
z.B.: H_2O-Moleküle

(b) Nicht-polare Atome oder Moleküle werden durch ext. $\underline{E}$-Feld polarisiert → induzierte el. Dipole $\parallel \underline{E}$!



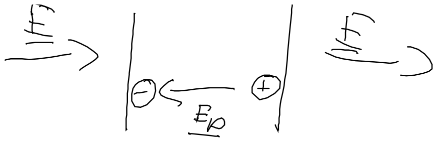
$\underline{E} = 0$ $\qquad$ $\underline{E} \neq 0$ (Trennung der pos. und neg. Ladungsträgerschwerpunkte)

Makroskopische räumliche Mittelung



→ Polarisationsladungsdichte (der gebundenen Ladungen)

$\Longrightarrow$ Gegenfeld $\underline{E}_p$ gemäß $\varepsilon_0 \underline{\nabla} \cdot \underline{E}_p = \rho_p$



→ resultierendes Gesamtfeld (in Materie!)

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{E}_p : \varepsilon_0 \nabla\cdot\mathbf{E}' = \underbrace{\varepsilon_0 \nabla\cdot\mathbf{E}}_{\text{freie Ladungsdichte } \rho} + \rho_p$$

$$\boxed{\varepsilon_0 \nabla\cdot\mathbf{E}' = \rho + \rho_p}$$

Polarisation: $\mathbf{P}(\mathbf{r},t) := \varepsilon_0 \mathbf{E}_p(\mathbf{r},t)$: makroskopisch lokales Feld dessen Quellen Polarisationsladungen sind!

Dielektrische Verschiebung $\mathbf{D}(\mathbf{r},t) := \varepsilon_0 \mathbf{E}' + \mathbf{P}$

effektive makroskopische Feldgröße, als deren Quellen nur die freien Ladungen auftreten

$$\hookrightarrow \boxed{\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho} \qquad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

Zusammenhang mit den mikroskopisch el. Dipolen

$$\rho_m(\mathbf{r},t) = \sum_i q_i\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \quad \text{: mikroskop. Ladungsdichte}$$

$$\mathbf{P}_m(\mathbf{r},t) = \sum_i \mathbf{p}_i(t)\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \quad \text{: mikroskop. Dipoldichte}$$

$$\longrightarrow \int \mathbf{P}_m\, d^3r = \sum_i \mathbf{p}_i$$

- Mittelung über kleines makroskop. Volumen ΔV:

$s \sim (\Delta V)^{1/3} \ll$ Längenskala der makrosk. Dichtevariation

$$\longrightarrow \rho(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} d^3s\, \rho_m(\mathbf{r}+\mathbf{s},t)$$

$$\longrightarrow \mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} d^3s\, \mathbf{P}_m(\mathbf{r}+\mathbf{s},t)$$

$$\boxed{\text{makroskopische Dipoldichte} \equiv \text{Polarisation} \; (*)}$$

Beweis von (*):

$$\phi_m(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\underbrace{\rho_m\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}_{\text{mikroskop. Ladungsdichte}} \quad \text{(mikroskop. ret. Pot.)}$$

Makroskop. gemitteltes Potential:

$$\phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} d^3s\, \phi_m(\mathbf{r}+\mathbf{s},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} d^3s \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\rho_m\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}+\mathbf{s}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}+\mathbf{s}-\mathbf{r}'|}$$

Verwende: $\underline{r}'' := \underline{r}' - \underline{s}$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3s \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'' \frac{\rho_m\left(\underline{r}'' + \underline{s}, t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r} - \underline{r}''|}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'' \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}''|} \underbrace{\frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3s\, \rho_m\left(\underline{r}'' + \underline{s}, t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}''|}{c}\right)}_{\rho\left(\underline{r}'', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}''|}{c}\right)}$$

makroskop. gemitteltes Ladungsdichte!

Analog:
mikroskop. pot. der elektrischen Dipole $\underline{p}_i$ (Lorenz-Eichung)

$$\phi_m(\underline{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \underline{\nabla}_r \left\{ \sum_i \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}_i|} \underline{p}_i\left(t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}_i|}{c}\right) \right\}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \underline{\nabla}_r \left\{ \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \underline{P}_m\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}\right) \right\}$$

$\underline{P}_m$ → mikroskop. Dipoldichte

Makroskop. gemitteltes el. Dipolpotential: (ΔV)

$$\phi(\underline{r}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3s\, \phi_m(\underline{r} + \underline{s}, t)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3s \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \underline{\nabla}_r \left\{ \frac{\underline{P}_m\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r} + \underline{s} - \underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r} + \underline{s} - \underline{r}'|} \right\}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'' \left[\underline{\nabla}_r \left\{ \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}''|} \underline{P}\left(\underline{r}'', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}''|}{c}\right) \right\} \right]$$

makroskop. Dipoldichte

Umformung:

$$\underline{\nabla}_r \left\{ \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \underline{P}\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}\right) \right\}$$

$$= -\underline{\nabla}_{r'} \left\{ \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \underline{P}\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}\right) \right\}$$

$$+ \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \left[\underline{\nabla}_{r'} \cdot \underline{P}(\underline{r}', t') \right]$$

$$t' = t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}$$

$$\Rightarrow \varphi(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \underbrace{\underline{\nabla}_{r'} \left\{ \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \underline{P}\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right) \right\}}_{=0 \ (\text{Gauß})}$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \underbrace{\left[-\underline{\nabla}_{r'} \cdot \underline{P}(\underline{r}',t') \right]_{t'=t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}}}_{\rho_p\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}$$

→ makroskopisches Potential einer Ladungsdichte

$$\boxed{\rho_p(\underline{r}',t') = -\underline{\nabla}_{r'} \cdot \underline{P}(\underline{r}',t) \qquad (\ast)}$$

→ Damit können wir die makroskopische Dipoldichte $\underline{P}$ mit der durch $\underline{P} := \varepsilon_0 \underline{E}_p$ bzw. $\underline{\nabla}\,\underline{P} = -\rho_p$ definierten Polarisation identifizieren!

5.2 Magnetisierung