Tutorium Fr. 14 – 16 Uhr entfällt!!

5. Materie in elektrischen und magnetischen Feldern

5.1 Polarisation

Materie enthält mikroskopische elektrisch geladene Bausteine (Elektronen, Kerne, Ionen, usw.....)

i) freie Ladungsträger (Elektronen in Metallen, Elektronen + Löcher in Halbleitern)

(→ Beschleunigung in äußeren (elektr./magn.) Feldern!)

• $\underline{F} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$

→ el. Ströme → Beschreibung der Materialeigenschaft durch die Leitfähigkeit σ

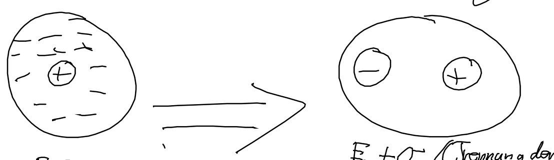
ii) gebundene Ladungen (in Isolatoren)

→ Polarisation im externen $\underline{E}$-Feld!

(a) für $\underline{E}$(extern) vorhandene mikroskopische Dipole $\underline{p}$ werden zur Minimierung der pot. Energie $W_d = -\underline{p}\,\underline{E}$ vorzugsweise (gegen die zufällige thermische Bewegung) $\uparrow\uparrow \underline{E}$ orientiert!

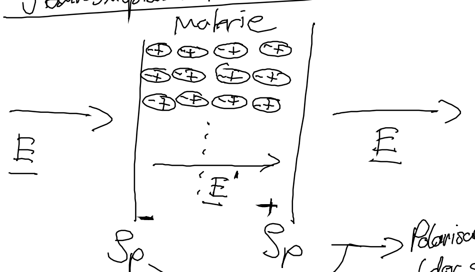
z.B.: H_2O-Moleküle

(b) Nicht-polare Atome oder Moleküle werden durch ext. $\underline{E}$-Feld polarisiert → induzierte el. Dipole $\parallel \underline{E}$!



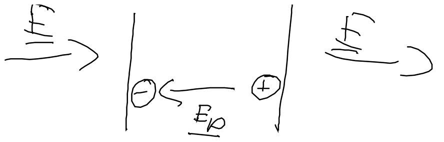
$\underline{E} = 0$ $\qquad$ $\underline{E} \neq 0$ (Trennung der pos. und neg. Ladungsträgerschwerpunkte)

Makroskopische räumliche Mittelung



→ Polarisationsladungsdichte (der gebundenen Ladungen)

$\Rightarrow$ Gegenfeld $\underline{E}_p$ gemäß $\varepsilon_0 \underline{\nabla} \cdot \underline{E}_p = \rho_p$



→ resultierendes Gesamtfeld (in Materie!)

$$\underline{E}' = \underline{E} + \underline{E}_p : \varepsilon_0 \nabla\cdot\underline{E}' = \underbrace{\varepsilon_0 \nabla\cdot\underline{E}}_{\text{freie Ladungsdichte } \rho} + \rho_p$$

$$\boxed{\varepsilon_0 \nabla\cdot\underline{E}' = \rho + \rho_p}$$

Polarisation: $\underline{P}(\underline{r},t) := \varepsilon_0 \underline{E}_p(\underline{r},t)$: makroskopisch lokales Feld dessen Quellen Polarisationsladungen sind!

Dielektrische Verschiebung $\underline{D}(\underline{r},t) := \varepsilon_0 \underline{E}' + \underline{P}$

effektive makroskopische Feldgröße, als deren Quellen nur die freien Ladungen auftreten

$$\longleftrightarrow \boxed{\nabla\cdot\underline{D} = \rho} \quad \underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E}$$

Zusammenhang mit den mikroskopisch el. Dipolen

$$\rho_m(\underline{r},t) = \sum_i q_i\, \delta(\underline{r} - \underline{r}_i(t)) \quad : \text{mikroskop. Ladungsdichte}$$

$$\underline{P}_m(\underline{r},t) = \sum_i \underline{p}_i(t)\, \delta(\underline{r} - \underline{r}_i(t)) \quad : \text{mikroskop. Dipoldichte}$$

$$\longrightarrow \int \underline{P}_m\, d^3r = \sum_i \underline{p}_i$$

- Mittelung über kleines makroskop. Volumen ΔV:

$$s \sim (\Delta V)^{1/3} \ll \text{Längenskala der makrosk. Dichtevariation}$$

$$\longrightarrow \rho(\underline{r},t) = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} d^3s\, \rho_m(\underline{r}+\underline{s},t)$$

$$\longrightarrow \underline{P}(\underline{r},t) = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} d^3s\, \underline{P}_m(\underline{r}+\underline{s},t)$$

$$\boxed{\text{makroskopische Dipoldichte} \equiv \text{Polarisation} \quad (*)}$$

Beweis von (*):

$$\phi_m(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\, \underbrace{\rho_m\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}_{\text{mikroskop. Ladungsdichte}} \quad \text{(mikroskop. ret. Pot.)}$$

Makroskop. gemitteltes Potential:

$$\phi(\underline{r},t) = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} d^3s\, \phi_m(\underline{r}+\underline{s},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} d^3s \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, \frac{\rho_m\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}+\underline{s}-\underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r}+\underline{s}-\underline{r}'|}$$

Verwende: $\underline{r}'' := \underline{r}' - \underline{s}$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3 s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r'' \, \frac{\varrho_m(\underline{r}'' + \underline{s}, t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c})}{|\underline{r} - \underline{r}''|}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r'' \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}''|} \underbrace{\frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3 s \, \varrho_m(\underline{r}'' + \underline{s}, t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}''|}{c})}_{\varrho(\underline{r}'', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}''|}{c})}$$

makroskop. gemitteltes Ladungsdichte!

Analog:

mikroskop. pot. der elektrischen Dipole $\underline{p}_i$ (Lorenz-Eichung)

$$\phi_m(\underline{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \underline{\nabla}_r \left\{ \sum_i \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}_i|} \underline{p}_i \left(t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}_i|}{c} \right) \right\}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \, \underline{\nabla}_r \left\{ \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \underbrace{\underline{P}_m}_{\text{mikroskop. Dipoldichte}} \left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c} \right) \right\}$$

Makroskop. gemitteltes el. Dipolpotential: (ΔV)

$$\phi(\underline{r}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3 s \, \phi_m(\underline{r} + \underline{s}, t)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3 s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \, \underline{\nabla}_r \left\{ \frac{\underline{P}_m(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r} + \underline{s} - \underline{r}'|}{c})}{|\underline{r} + \underline{s} - \underline{r}'|} \right\}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r'' \, \underline{\nabla}_r \left\{ \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}''|} \underbrace{\underline{P}}_{\text{makroskop. Dipoldichte}} \left(\underline{r}'', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}''|}{c} \right) \right\}$$

Umformung:

$$\underline{\nabla}_r \left\{ \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \underline{P} \left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c} \right) \right\}$$

$$= -\underline{\nabla}_{r'} \left\{ \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \underline{P} \left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c} \right) \right\}$$

$$+ \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \left[\underline{\nabla}_{r'} \underline{P}(\underline{r}', t') \right]$$

$$t' = t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}$$

$$\Longrightarrow \Phi(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \underline{\nabla}_{r'} \left\{ \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \underline{P}\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right) \right\}}_{=0 \ (\text{Gauß})}$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \underbrace{\left[-\underline{\nabla}_{r'} \underline{P}(\underline{r}', t') \right]_{t'=t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}}}_{\rho_p\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}$$

→ makroskopisches Potential einer Ladungsdichte

$$\boxed{\rho_p(\underline{r}', t') = -\underline{\nabla}_{r'} \underline{P}(\underline{r}', t) \quad (*)}$$

→ Damit können wir die makroskopische Dipoldichte $\underline{P}$ mit der durch $\underline{P} := \varepsilon E_p$ bzw. $\underline{\nabla}\,\underline{P} = -\rho_p$ definierten Polarisation identifizieren!

5.2 Magnetisierung