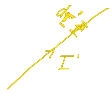
2.3. Magnetostatische Feldgleichungen

Wdh: $\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$

für Leiter

$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I' \int_{L'} d\underline{r}' \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

Biot - Savart - Gesetz (1820)



Mit dem Vektorpotenzial $\underline{A}(\underline{r})$ $\quad \underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$ lässt sich

schreiben: $\boxed{\underline{B}(\underline{r}) = \text{rot } \underline{A}(\underline{r})}$

Bem: $\underline{A}$ ist nicht eindeutig
Umeichung
$\underline{A} \to \underline{A} + \nabla \psi$ mit bel. ψ
da $\nabla \times \nabla \psi = 0$
$\text{rot}(\text{grad}\, \psi) = 0$

Beweis: $\nabla_r \times \underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3r' \, \underbrace{\nabla_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{-\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}} \times \underline{j}(\underline{r}')$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} = \underline{B}$$

Folgendes ist äquivalent:

(i) $\underline{B}(\underline{r}) = \text{rot } \underline{A}$

$\updownarrow$

(ii) $\text{div } \underline{B} = 0$ $\iff$ es gibt keine magnetischen "Ladungen", keine Quellen der magn. Induktion

Zusammenhang zwischen $\underline{B}$ und $\underline{j}$?

$$\text{rot } \underline{B} = \nabla \times (\nabla \times \underline{A}) = \underbrace{\nabla (\nabla \underline{A})}_{\hat{=}\, \text{grad}(\text{div } \underline{A})} - \triangle \underline{A}$$

① ②

①: $\nabla \cdot \underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \nabla_r \left(\frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}') \underbrace{\nabla_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{-\nabla_{r'} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}$

Produktregel

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \left[\underbrace{-\nabla_{r'} \left(\frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right)}_{\text{Satz von Gauß}} + \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \underbrace{\nabla_{r'} \underline{j}(\underline{r}')}_{\text{Kontinuitätsgleichung}} \right]$$

$\nabla \cdot \underline{j} + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S\,(r\to\infty)} d\underline{f}' \, \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \; - \; \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{\rho(\underline{r}',t)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{\mu_0 \varepsilon_0 \, \phi(\underline{r},t)}$$

↓ 0 für hinreichend rasch abklingende Ströme $\underline{j}(\underline{r}')$

$\Rightarrow$

$$\nabla(\nabla \cdot A) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}$$

(2) $$\Delta \underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}') \underbrace{\Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{-4\pi \, \delta(\underline{r}-\underline{r}')} = -\mu_0 \, \underline{j}(\underline{r},t)$$

Also zusammengefasst: $$\boxed{\text{rot}\, \underline{B} = \mu_0 \underline{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}}$$

Verschiebungsstromdichte

Für stationäre Strom + Ladungsverteilungen

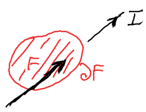
(*) $$\boxed{\text{rot}\, \underline{B} = \mu_0 \underline{j}}$$

differenzielle Form des Ampère Gesetzes

Ampère'sches Durchflutungsgesetz

Ströme sind die Wirbel der magn. Induktion.

Integration über Fläche F:



$$\int_F d\underline{f}\, \text{rot}\, \underline{B} \overset{\text{Stokes}}{=} \oint_{\partial F} d\underline{s}\, \underline{B} \overset{(*)}{=} \mu_0 \underbrace{\int_F d\underline{f}'\, \underline{j}(\underline{r}')}_{I \text{ Strom durch Fläche}}$$

$$\Rightarrow \oint_{\partial F} ds\, \underline{B}(\underline{r}) = \mu_0 I$$

Zusammenfassung

Magnetostatik		Elektrostatik
$\text{div}\, \underline{B} = 0$ $\Updownarrow$ $\text{rot}\, \underline{A} = \underline{B}$	$\hat{=}$ quellfrei / wirbelfrei $\hat{=}$	$\text{rot}\, \underline{E} = 0$ $\Updownarrow$ $\underline{E} = -\nabla \phi$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\underline{B} &= \mu_0 \underline{j} \\ &\Updownarrow \\ \int_{\partial F} d\underline{s}\,\underline{B} &= \mu_0 I \end{aligned}}$$

Ampère'sches Durchflutungsgesetz

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_0 \,\mathrm{div}\, \underline{E} &= \rho \\ &\Updownarrow \\ \varepsilon_0 \int_{\partial V} d\underline{f}\, \underline{E} &= Q \end{aligned}}$$

Gauß'sche Gesetz

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}(\underline{r})}$$

gilt nur falls $\mathrm{div}\,\underline{A} = 0$
d.h. in Coulomb Eichung
(Umeichung $\underline{A}' = \underline{A} + \nabla\chi(\underline{r})$)

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{r})}$$

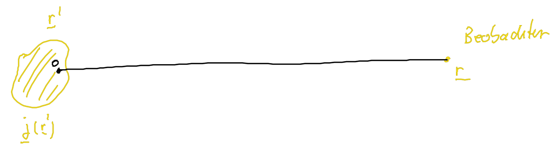
Poissongl.

Bem: Magnetostatik und Elektrostatik sind entkoppelt.

2.4. Magnetische Multipole

Ausgangspunkt: $\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$

Lösung von $\Delta \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}(\underline{r})$ in Coulomb Eichung für RB $\underline{A}\to 0$ für $r\to\infty$



$\underline{r}' << \underline{r}$

$$\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{(\underline{r}\,\underline{r}')}{r^3} + \ldots$$

Taylorentwicklung um $|\underline{r}'| = 0$

$r = |\underline{r}|$

$$\Rightarrow \quad \underline{A}(\underline{r}) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi r}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}')}_{\text{Monopolterm}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, (\underline{r}\cdot\underline{r}')\,\underline{j}(\underline{r}')}_{\text{Dipolterm}} + \ldots$$

Monopolterm: verwende: $\nabla_{r'}\left(x_k'\,\underline{j}(\underline{r}')\right) = x_k' \underbrace{(\nabla_{r'}\cdot\underline{j})}_{0} + \underbrace{\underline{j}\,(\nabla_{r'}\,x_k')}_{j_k\,\delta_{kl}} = j_k$

$(k=1)$

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\int d^3r'\, j_k(\underline{r}') = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, \nabla_{r'} [x_k \underline{j}] = \int_{S(\infty)} d\underline{f} \cdot x_k \underline{j} = \underline{\underline{0}}$$

→ Monopolterm verschwindet !

$$\left[a \times (b \times c) = b(a c) - c(a b) \right]$$

Dipolterm : • $(\underline{r}' \times \underline{j}) \times \underline{r} = (\underline{r} \cdot \underline{r}')\underline{j} - (\underline{r} \cdot \underline{j}) \cdot \underline{r}'$

$$= 2(\underline{r} \cdot \underline{r}')\underline{j} - \left[(\underline{r} \cdot \underline{r}')\underline{j} + (\underline{r} \cdot \underline{j})\underline{r}' \right]$$

• $\nabla_{r'} \cdot \left[x_k' (\underline{r} \cdot \underline{r}')\underline{j} \right] = \left[(\underline{r} \cdot \underline{r}') j_k + x_k' (\underline{r} \cdot \underline{j}) + x_k' (\underline{r} \cdot \underline{r}') \underbrace{\nabla \cdot \underline{j}}_{0} \right]$

$$\rightarrow \underbrace{\int_{\mathbb{R}} d^3r'\, \nabla_{r'} \left\{ x_k' (\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{j} \right\}}_{\int_{S_\infty} d\underline{f}' \left\{ x_k' (\underline{r}\,\underline{r}') \underline{j} \right\}} = \int d^3r' \left[(r' r') j_k + (\underline{r} \cdot \underline{j}) x_k' \right] = 0$$

↓ 0 da $j \to 0$ für $r' \to \infty$

$$\Rightarrow \underline{A}^{(1)}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \underbrace{\left(\underline{r}' \times \underline{j}(r') \right)} \times \underline{r}$$

Dipolterm

magnetische Dipolmoment

$$\boxed{\underline{m} := \frac{1}{2} \int d^3r'\, \underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}')}$$

Vergleiche elektrische Dipolmoment

$$\underline{p} := \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, \underline{r}' \rho(\underline{r}')$$

$$\phi^{(1)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \underline{p} \cdot \underline{r}$$

$$E^{(1)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^5} \left[3(\underline{p} \cdot \underline{r})\underline{r} - r^2 \underline{p} \right]$$

$$\boxed{\underline{A}^{(1)}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \underline{m} \times \underline{r}}$$

Magnetische Induktion des Dipolpotenzials

$$\underline{B}(\underline{r}) = \text{rot}\, \underline{A}(\underline{r}) = \text{rot} \left[\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \underline{m} \times \underline{r} \right] = \boxed{\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^5} \left[3(\underline{m} \cdot \underline{r})\underline{r} - r^2 \underline{m} \right]}$$

↑ wegen $\text{rot}(\underline{v}_1 \times \underline{v}_2) = (\underline{v}_2 \cdot \nabla)\underline{v}_1 - (\underline{v}_1 \cdot \nabla)\underline{v}_2 + \underline{v}_1 (\nabla \cdot \underline{v}_2) - \underline{v}_2 (\nabla \cdot \underline{v}_1)$

$\underline{v}_1 = \frac{\underline{m}}{r^3}$ $\quad$ $\text{div}\, \underline{v}_1 = -\frac{3 \underline{m}\, \underline{r}}{r^5}$

$\underline{v}_2 = \underline{r}$ $\quad$ $\text{div}\, \underline{v}_2 = 3$

$$(\underline{v}_2 \cdot \nabla)\underline{v}_1 = -3\underline{m} \frac{r^2}{r^5}, \quad (\underline{v}_1 \cdot \nabla)\underline{v}_2 = \frac{\underline{m}}{r^3}$$