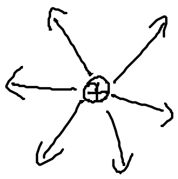
Poisson-Gleichung

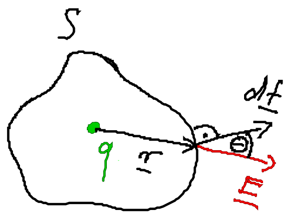


Quellen des elektrischen Feldes

Punktladung q bei $\underline{r}'=0$

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\underline{r}}{r^3}$$

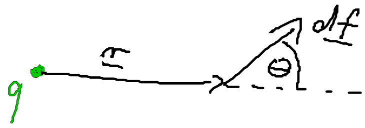
Elektrischer Kraftfluss durch eine geschlossene Oberfläche S um q



$$\oint_S d\underline{f}\cdot\underline{E}(\underline{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{d\underline{f}\cdot\underline{r}}{r^3}$$

$$\overset{*}{=} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\oint d\Omega}_{4\pi}$$

$$= \frac{q}{\varepsilon_0}$$



$$df\cdot\cos\Theta = r^2\, d\Omega$$

$$\Rightarrow d\underline{f}\cdot\underline{r} = df\; r\cos\Theta = r^3\, d\Omega \quad (*)$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_0\oint d\underline{f}\cdot\underline{E}(\underline{r}) = q}$$

Verallgemeinerung auf kontinuierliche Ladungsverteilung:

$$\boxed{\varepsilon_0\oint_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{E}(\underline{r}) = \int_V d^3r'\,\rho(\underline{r}')}$$

für beliebige Volumen V.

Integralform des Coulomb-Gesetzes

(Gauß'sches Gesetz)

Gauß'scher Integralsatz

$$\oint_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \int_V d^3\underline{r}' \,\mathrm{div}\, \underline{E}(\underline{r}')$$ (einfach zus. Gebiete V)

$$\Rightarrow \int_V d^3\underline{r}' \,\varepsilon_0 \,\mathrm{div}\, \underline{E}(\underline{r}') = \int_V d^3\underline{r}' \,\rho(\underline{r}')$$ gilt für bel. zus.-häng. Gebiete V.

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_0 \,\mathrm{div}\, \underline{E}(\underline{r}) = \rho(\underline{r})}$$

differentielle Form des Gauß'schen Gesetzes

Die el. Ladungen sind Quellen des el. Feldes.

Grundgleichungen der Elektrostatik

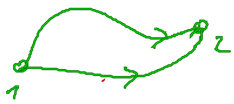
(i) $\underline{E}(\underline{r})$ besitzt ein skalares Pot.: $\underline{E}(\underline{r}) = -\underline{\nabla}\,\phi(\underline{r})$

$\Updownarrow$

(ii) $\boxed{\mathrm{rot}\, \underline{E}(\underline{r}) = 0}$ $\qquad \underline{\nabla} \times \underline{E} = 0$ statisches E-Feld ist wirbelfrei

$\Updownarrow$ $\qquad (\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi = \underline{\nabla} \times \underline{\nabla}\phi = 0)$

(iii) $\int_1^2 \underline{E}\, d\underline{s}$ wegunabhängig

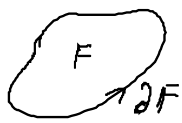


$\Updownarrow$

(iv) $\oint \underline{E}\, d\underline{s} = 0$

Beweis (ii) $\Leftrightarrow$ (iv) mit Hilfe des Stokes'schen Satzes:

$$\oint_{\partial F} \underline{E} \cdot d\underline{s} = \int_F \mathrm{rot}\, \underline{E}\, d\underline{f}$$



$\oint \underline{E} \cdot d\underline{s} = 0 \Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (iii)

(iv) $\oint \underline{E}\, d\underline{s} = 0 \Rightarrow \int \mathrm{rot}\, \underline{E} \cdot d\underline{f} = 0$ gilt für bel. F

$$\Rightarrow \text{rot}\,\underline{E} = 0 \qquad \square$$

Arbeit im el. Feld

Arbeit, um Ladung q von $\underline{r}_1 \to \underline{r}_2$ zu verschieben:

$$W = \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{F}(\underline{r}) \cdot d\underline{s} = q \int_1^2 \underline{E} \cdot d\underline{s} = -q \int_1^2 d\underline{s} \cdot \underline{\nabla} \phi$$

$$= -q \int_1^2 d\phi$$

$$= q \cdot \left[\phi(\underline{r}_1) - \phi(\underline{r}_2) \right]$$

Potenzialdifferenz = el. Spannung

1.3. Poisson-Gleichung und Green'sche Fkt.

$\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi$ eingesetzt in $\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\underline{r})} \qquad \text{Poisson-Gl.}$$

Δ: Laplace-Operator $\underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} \overset{\text{kart. Koord.}}{=} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

part. DGL zur Berechnung des el. Pot. für vorgegebene Ladungsverteilung.

Eindeutig durch Randbedingungen:

(i) $\phi(\underline{r}) \to 0$ hinreichend rasch für $|r| \to \infty$.

oder

(ii) $\phi(\underline{r})$ sei gegeben auf Leiteroberflächen im Endlichen.

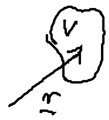
<u>Lösung zu (i):</u> $\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$

(rasch abfallendes ρ)

eingesetzt:

$$\Delta \phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, \rho(\underline{r}') \, \Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \qquad (1)$$

a) für $\underline{r}' \neq \underline{r}$:



$$\Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \underline{\nabla}_r \cdot \underline{\nabla}_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = -\underline{\nabla}_r \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

$$= -\frac{\underline{\nabla}_r(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} - (\underline{r}-\underline{r}')\underline{\nabla}_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

$\underline{\nabla} \cdot \underline{r} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 3$

$\underline{\nabla}|\underline{r}| = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}$

$$= -\frac{3}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} + 3(\underline{r}-\underline{r}')\frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|^4}$$

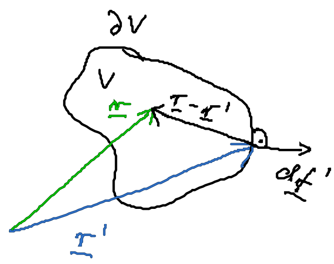
$$= 0$$

b) $\underline{r}' \in V$

$$\int_V d^3r' \, \Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = -\int_V d^3r' \, \underline{\nabla}_{r'} \cdot \underline{\nabla}_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

Gauß'scher Satz

$$= -\int_{\partial V} d\underline{f}' \cdot \nabla_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$



$$= \int_{\partial V} d\underline{f}' \cdot \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

$$= -\oint d\Omega$$

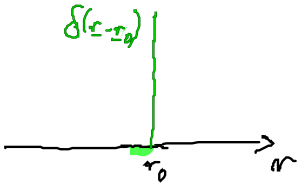
$$= \begin{cases} -4\pi & \text{für } \underline{r}' \in V \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Erg.: $$\boxed{\Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = -4\pi\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')}$$

· Dirac'sche δ-Funktion (δ-Distribution)

$$\int_V d^3r\, \delta(\underline{r}-\underline{r}_0) = \begin{cases} 1, & \underline{r}_0 \in V \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\delta(\underline{r}-\underline{r}_0) = 0 \qquad \forall\, \underline{r} \neq \underline{r}_0$$



$$\int_V d^3r\, f(\underline{r})\cdot\delta(\underline{r}-\underline{r}_0) = f(\underline{r}_0)$$

Poisson-Gleichung:

$$\Delta\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, \rho(\underline{r}')\,\Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$= \frac{-4\pi}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, \rho(\underline{r}')\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{r}) \qquad \text{Poisson-Gleichung ist erfüllt!}$$

Physikalische Interpretation von $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')$

$\Rightarrow$ Coulomb-Pot. $\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$

ist die Lösung der Poisson-Gl. im ganzen $\mathbb{R}^3$

für eine Pkt.-Ladung $q=1$ bei $\underline{r}'$

Green'sche Fkt.

Allg. Methode zur Lösung inhomogener (part. oder gew.) Dgln. für gegebene Inhomogenitäten.

z.B.
- gedämpfte getriebene harm. Osz.
- Poisson-Gl.
- Wellengl.
- Streutheorie
- Wärmeleitung

Strategie:

(i) Zuerst Lösung der Dgl für δ-förmige Inhomogenität

$$\Delta_r G(\underline{r}-\underline{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

d.h. Green'sche Fkt. ist Lösung für Pkt.-Ladung $q=1$ bei $\underline{r}'$

Für Randbed. $\phi \to 0$ $(|\underline{r}| \to \infty)$ ist

$$G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

(ii) Dann Lösung für bel. Inhomogenität $\varrho(\underline{r})$ durch Faltung mit der Greens-Fkt.

$$\Rightarrow \quad \boxed{\phi(\underline{r}) = \int d^3r'\, G(\underline{r}-\underline{r}')\cdot\varrho(\underline{r}')}$$