English Summary

momentum balance: $\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\underline{g} + \underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{T}} = -(\rho\underline{E} + \underline{j}\times\underline{B})}$

momentum density $\underline{g} = \underline{D}\times\underline{B}$

momentum flux density $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{1}}\,w - \underline{E}\otimes\underline{D} - \underline{B}\otimes\underline{H}$ (Maxwell tensor)

$\hat{=}\ {}^{t}\underline{\underline{T}}$

gauge invariance : $\underline{A}' = \underline{A} + \underline{\nabla}F$

$\phi' = \phi - \frac{\partial}{\partial t}F$

Lorenz gauge $\boxed{\underline{\nabla}\cdot\underline{A} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\phi = 0}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l}\Box\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho \\ \Box\underline{A} = -\mu_0\underline{j}\end{array}}$ decoupled wave eqs.

$\Box \equiv \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ d'Alembert

$c \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ velocity of light

(ii) Coulomb-Eichung (Strahlungseichung)

$\boxed{\underline{\nabla}\cdot\underline{A} = 0}$

Allg.: Zerlegung von $\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}$

in Longitudinalfeld $\underline{E}_\ell := -\underline{\nabla}\phi$ (wirbelfrei)

und Transversalfeld $\underline{E}_t := -\frac{\partial}{\partial t}\underline{A}$ (quellenfrei)

Tatsächlich gilt: $\underline{\nabla}\times\underline{E}_\ell = -\underline{\nabla}\times\underline{\nabla}\phi = 0$

$\underline{\nabla}\cdot\underline{E}_t = -\frac{\partial}{\partial t}\underline{\nabla}\cdot\underline{A} = 0$

$\underline{B}$ ist immer transversal : $\underline{\nabla}\cdot\underline{B} = \underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{A}) = 0$

Also: ϕ ergibt die longitudinalen, $\underline{A}$ die transversalen Felder

Zerlegung der Stromdichte: $\underline{j} = \underline{j}_\ell + \underline{j}_t$

mit $\underline{\nabla} \times \underline{j}_\ell = 0$, $\underline{\nabla} \cdot \underline{j}_t = 0$

Mit $\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\rho}_{\epsilon_0 \underline{\nabla} \cdot \underline{E}_\ell} + \underline{\nabla} \cdot \underline{j}_\ell + \underbrace{\underline{\nabla} \cdot \underline{j}_t}_{0} = 0$

$$\underline{\nabla} \cdot \left(\underline{j}_\ell + \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}_\ell}{\partial t} \right) = 0$$

Außerdem gilt nach Def. von „longitudinal":

$$\underline{\nabla} \times \left(\underline{j}_\ell + \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}_\ell}{\partial t} \right) = 0$$

$\Rightarrow \underline{j}_\ell + \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}_\ell}{\partial t} = \text{const.} = 0$, da für $r \to \infty$ verschwindet

$$\Rightarrow \boxed{\underline{j}_\ell = \epsilon_0 \underline{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t}}$$

Die Feldgl. $\Delta \phi + \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\underline{\nabla} \cdot \underline{A}}_{0} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$

$$\underbrace{\Delta \underline{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{A}}_{\square \underline{A}} - \underline{\nabla} \underbrace{(\underline{\nabla} \cdot \underline{A})}_{0} - \mu_0 \epsilon_0 \underbrace{\underline{\nabla} \frac{\partial}{\partial t} \phi}_{\underline{j}_\ell} = -\mu_0 \underline{j}$$

erhalten die Form

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta \phi &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \square \underline{A} &= -\mu_0 \underline{j}_t \end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ longit. Felder $\hat{=}$ Elektrostatik

$\Rightarrow$ transv. Felder $\hat{=}$ el. magn. Wellen

Die Coulomb-Eichung ist zweckmäßig bei Strahlungsproblemen!

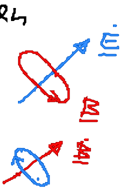
Poisson-Gl. für ϕ
Wellen-Gl. für $\underline{A}$

4. Elektromagn. Wellen

Im statischen Fall sind $\underline{E}$ und $\underline{B}$ entkoppelt.
Im <u>dynamischen</u> Fall sind $\underline{E}$ und $\underline{B}$ über den

<u>Verschiebungsstrom</u> $\frac{1}{\mu_0}\underline{\nabla}\times\underline{B} - \underline{j} = \epsilon_0 \dot{\underline{E}}$

und das <u>Induktionsgesetz</u> $\underline{\nabla}\times\underline{E} = -\dot{\underline{B}}$



gekoppelt $\Longrightarrow$ elektromagn. Wellenausbreitung

4.1 Freie Wellenausbreitung im Vakuum

Betrachte Raumbereich ohne Quellen: $\varrho = 0$, $\underline{j} = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} \Box\, \Phi &= 0 \\ \Box\, \underline{A} &= 0 \end{aligned}}$$

<u>homogene Wellengln.</u> (Lorenz-Eichung)

Wegen $\underline{E} = -\dot{\underline{A}} - \underline{\nabla}\phi$, $\underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A}$ gilt auch

$$\boxed{\begin{aligned} \Box\, \underline{E} &= 0 \\ \Box\, \underline{B} &= 0 \end{aligned}}$$

(Dies folgt auch direkt aus $\underline{\nabla}\times\underline{B} = \epsilon_0\mu_0\dot{\underline{E}}$, $\underline{\nabla}\times\underline{E} = -\dot{\underline{B}}$:

$$\underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{E}) = \underline{\nabla}(\underbrace{\underline{\nabla}\cdot\underline{E}}_{0}) - \Delta\underline{E} = -\underline{\nabla}\times\dot{\underline{B}} = -\epsilon_0\mu_0\ddot{\underline{E}}$$

$$\Leftrightarrow \Big(\Delta - \underbrace{\epsilon_0\mu_0}_{1/c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big)\underline{E} = 0 \qquad)$$

Allgemeine Lösung von $\Box\, u(\underline{r},t) = 0$

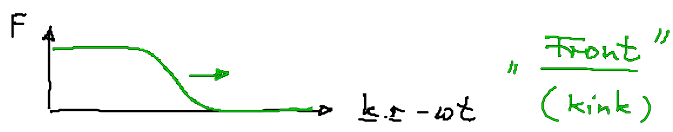
$u(\underline{r},t) = F(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)$

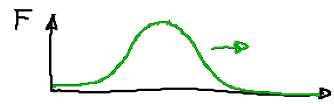
mit beliebiger, 2x diff.barer Funktion $F(\varphi)$

und $\boxed{\omega = c|\underline{k}|}$ (d'Alembert'sche Lösung)

Beweis: $\Box\, F = \left(\underline{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)F''(\varphi) = 0$ $\square$

<u>NB</u>: F muss nicht periodisch in φ sein, z.B. solitäre Wellen:





„Puls"
(Domäne)

$\underline{k}$ Wellenvektor
ω Frequenz
φ Phase

$\underline{k}$ (Ausbreitungsrichtung)
$\nabla\varphi(\underline{r},t) = \underline{k}$

Flächen konstanter Phase

$\Rightarrow$ ebene Welle

$$\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t = \varphi(\underline{r},t) \overset{!}{=} \text{const.} : \text{Ebene}$$

$$\underline{k}\cdot\underbrace{\left[\underline{r} - \frac{1}{k^2}\underline{k}(\omega t + \varphi)\right]} = 0$$

Ausbreitung der Orte konst. Phase $\underline{r}(t) = \frac{1}{k^2}\,\underline{k}(\omega t + \varphi)$

$\Rightarrow$ Phasengeschwindigkeit $\underline{v}_{ph} = \left.\frac{d\underline{r}}{dt}\right|_{\varphi = \text{const}} = \frac{\underline{k}}{k^2}\omega = c\,\underbrace{\frac{\underline{k}}{k}}_{=:\underline{n}}$

Spezielle Lösung: harmonische ebene Welle

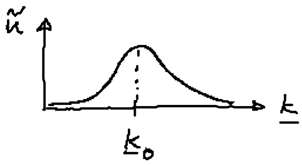
$$u(\underline{r},t) = \underbrace{\tilde{u}(\underline{k})}_{\text{komplexe Amplitude}}\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$$

[Lit.: L. Brillouin, Wave propag. and group velocity, 1960]

lineare Superposition (für allg. Dispersionsrel. $\omega(\underline{k})$):

$$u(\underline{r},t) = \int d^3k\, \tilde{u}(\underline{k})\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega(\underline{k})t)}$$

Sei $\tilde{u}(\underline{k})$ um $\underline{k}_0$ lokalisiert:



$\Rightarrow$ Wellenpaket (im Ortsraum lokalisiert)

Denn: Taylor-Entwicklung der Phase um $\underline{k}_0$

$$\omega(\underline{k}) \approx \underbrace{\omega(\underline{k}_0)}_{\omega_0} + \underbrace{(\underline{k}-\underline{k}_0)}_{\tilde{\underline{k}}} \underbrace{\underline{\nabla}_k \omega(\underline{k})\Big|_{\underline{k}=\underline{k}_0}}_{\underline{v}_g} + \ldots$$

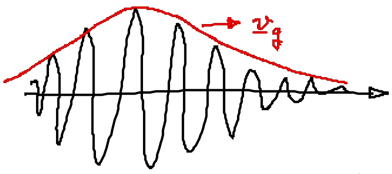
$$= \omega_0 + \tilde{\underline{k}} \cdot \underline{v}_g + \ldots$$

ergibt

$$u(\underline{r},t) = \underbrace{e^{i(\underline{k}_0 \underline{r} - \omega_0 t)}} \underbrace{\int d^3\tilde{k}\, \tilde{u}(\underline{k}_0 + \tilde{\underline{k}})\, e^{i\tilde{\underline{k}}(\underline{r} - \underline{v}_g t)}}$$

Trägerwelle mit Phasengeschw. $v_{ph} = \frac{\omega_0}{k_0}$

Einhüllende, Max. bewegt sich mit Gruppengeschw. $\boxed{\underline{v}_g = \underline{\nabla}_k \omega(\underline{k})}$



Dispersionsrelation $\omega(\underline{k})$

el. magn. Wellen im Vakuum $\omega(\underline{k}) = c|\underline{k}|$

$$\Rightarrow \underline{v}_g = -\frac{\underline{k}}{|\underline{k}|} \overset{!}{=} \underline{v}_{ph} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}\, \underline{n}$$

keine Dispersion (d.h. kein Zerfließen) !

(im Gegensatz zu el. magn. Wellen in dispersiven Medien oder qm. Materiewellen im Vakuum)

Polarisation

Betrachte el. magn. Welle $\underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$

$\underline{B}(\underline{r},t) = \underline{B}_0 e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$

$\underline{E}$ heißt transversal, falls $\underline{\nabla}\cdot\underline{E} = 0$ (quellenfrei)

$\Rightarrow i\underline{k}\cdot\underline{E} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\underline{E} \perp \underline{k}}$

$\underline{E}$ heißt longitudinal, falls $\underline{\nabla}\times\underline{E} = 0$ (wirbelfrei)

$\Rightarrow i\underline{k}\times\underline{E} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\underline{E} \parallel \underline{k}}$

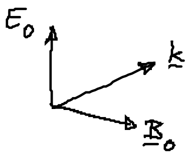
Für $\varrho = 0$ ist wegen $\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = 0$: $\underline{E}(\underline{r},t)$ transversal

stets wegen $\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0$: $\underline{B}(\underline{r},t)$ transversal

Weiter folgt aus $\underline{\nabla} \times \underline{E} + \dot{\underline{B}} = 0$:

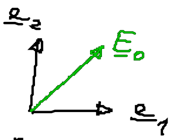
$$(i\underline{k} \times \underline{E}_0 - i\underbrace{\omega}_{c|\underline{k}|} \underline{B}_0)\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{B}_0 = \frac{1}{c}\, \underline{n} \times \underline{E}_0}$$

$$\underline{n} = \frac{\underline{k}}{|\underline{k}|}$$



$\underline{k}, \underline{E}_0, \underline{B}_0$ bilden Rechtssystem

Die Richtung von $\mathrm{Re}\{\underline{E}_0, \underline{B}_0\}$ legt Polarisation fest:



Sei: $\underline{k} \parallel \underline{e}_3$-Achse

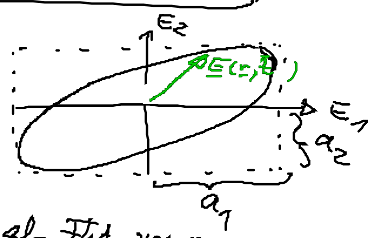
$\underline{E}_0 = E_{01}\underline{e}_1 + E_{02}\underline{e}_2$ mit $E_{0i} = a_i e^{i\delta_i} \in \mathbb{C}$ $(a_i, \delta_i \in \mathbb{R}, i = 1,2)$

Physik. Feld : $E_1 = a_1 \cos(\varphi + \delta_1)$ $\quad \varphi \equiv \underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t$

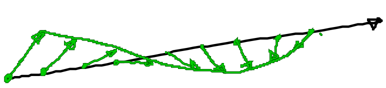
$E_2 = a_2 \cos(\varphi + \delta_2)$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{E_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_2}{a_2}\right)^2 - 2\frac{E_1}{a_1}\frac{E_2}{a_2}\cos\delta = \sin^2\delta} \qquad \delta := \delta_2 - \delta_1$$

Ellipsengl. für E_1, E_2 :



Der Feldvektor $\underline{E}$ läuft als Fkt. von φ auf einer Ellipse $\perp$ $\underline{k}$ um : elliptische Polarisation



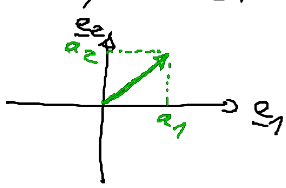
$\varphi = \underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t$ ($\hat{=}$ r für festes t oder $-t$ für festes $\underline{r}$)

Spezialfälle:

(1) linear polarisierte Welle : $\delta_1 = \delta_2 + n\pi$

$\Rightarrow \sin\delta = 0$, $\cos\delta = \pm 1$

$$\boxed{\frac{E_1}{a_1} \pm \frac{E_2}{a_2} = 0}$$



gerade $\underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}_0 \cos\varphi(\underline{r},t)$

$\underline{E}_0$ reell

(b) Zirkular polarisierte Welle : $a_1 = a_2 \equiv a$

$\delta_1 = \delta_2 + (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\delta = 0$

$\sin\delta = \pm 1$

$$\boxed{E_1^2 + E_2^2 = a^2}$$

(Überlagerung zweier um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschobener lin. polar. Wellen)

$\underline{E}$ läuft auf Kreis um : $\underline{E}(\underline{r},t) = a\begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \pm\sin\varphi\end{pmatrix}$

links- / rechts-zirkular polarisiert