English Summary:

Relativistic mechanics:

- Eigentime $\boxed{\tau := \frac{s}{c}}$, $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$, $ds = (dx^\mu dx_\mu)^{1/2}$
- 4-velocity $\boxed{u^\mu := \frac{dx^\mu}{ds}}$, $u^\mu u_\mu = 1$
- 4-momentum $\boxed{p^\mu := m_0 c u^\mu}$, $p^\mu p_\mu = (m_0 c)^2 = \frac{E^2}{c^2} - \underline{p}^2$

$$\left.\begin{aligned} p^0 &= m(v)c \\ p^i &= m(v)v^i \end{aligned}\right\} \text{relativistic mass } \boxed{m(v) := \gamma m_0}$$

- 4-force $\boxed{f^\mu := \frac{d}{d\tau} p^\mu}$
- energy $\boxed{E := c\underbrace{p^0}_{\text{rest momentum}} = m(v)c^2}$

energy-momentum relation

$$\boxed{E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 \underline{p}^2}$$

(limiting cases $\left\{\begin{array}{l} \text{non-relativ.: } |\underline{p}| \ll m_0 c \\ \text{high-relativ.: } m_0 \to 0, \\ E = c|\underline{p}| \end{array}\right.$)

6.4 Transformationsverhalten der Ströme und Felder

Ziel: Ko-/Kontravariante Formulierung d. Elektrodynamik im Vakuum

Motivation/Grund: Klass. Elektrodynamik ist eine Lorentz-invariante Theorie!

Kontinuitätsgl. für Ladungserhaltung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \underline{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \underbrace{\partial_i}_{= \partial / \partial x^i} j^i = 0$$

in 4er-Schreibweise:

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0} \quad \text{mit} \quad \boxed{(j^\mu) := (c\rho, \underline{j})} \quad \text{4-Stromdichte}$$

(Erinnerung: $\underline{j} = \rho \underline{v}$)

Forderung: Ladungserhaltung soll in allen Inertialsystemen gelten. (j^μ) muss wie ein 4-Vektor transformieren, damit das Skalarprod. $\partial_\mu j^\mu$ Lorentz-invariant ist:

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2} x^1\right) \\ x' &= \gamma(x^1 - v t) \end{aligned} \qquad \beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Also gilt auch für Ladungs- u. Stromdichten:

$$\boxed{\begin{aligned} j'^0 &= \gamma(j^0 - \beta j^1) \\ j'^1 &= \gamma(j^1 - \beta j^0) \end{aligned}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\begin{aligned} \rho' &= \gamma\left(\rho - \frac{v}{c^2} j^1\right) \\ j'^1 &= \gamma(j^1 - v\rho) \end{aligned}}$$

$$j'^2 = j^2$$
$$j'^3 = j^3$$

(Für $v \neq 0$ „mischt" die Lorentz-Trafo Ladungsdichte u. Kompon. d. Stromdichte.)

Der 4-Gradient $(\partial_\mu) := \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \underline{\nabla}\right)$ transformiert bei Lorentz-Transform. kovariant (wie x_μ):

$$(\partial^\mu) := \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, -\underline{\nabla}\right)$$

d'Alembert-Operator durch ko-/kontravar. Grad. ausgedrückt:

$$\Box := \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu} = -\underbrace{\partial_\mu}_{[\text{div}]} \underbrace{\partial^\mu}_{[\text{grad}]}$$

$$\boxed{\Box = -\partial_\mu \partial^\mu}$$

4-Potenziale

Die elektrodyn. Potenziale ϕ, $\underline{A}$ sind (in der Lorenz-Eichung $\underline{\nabla}\cdot\underline{A}+\frac{1}{c^2}\partial_t\phi=0$) Lösungen von

$$\left\{\begin{array}{l}\Box\phi=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\\ \Box\underline{A}=-\mu_0\underline{j}\end{array}\right\}\quad(\text{mit } \mu_0 c=\frac{1}{\varepsilon_0 c})\quad\left\{\begin{array}{l}\partial_\mu\partial^\mu\phi=\frac{c\rho}{\varepsilon_0 c}=\frac{1}{\varepsilon_0 c}j^0\\ \partial_\mu\partial^\mu(cA^i)=\frac{1}{\varepsilon_0 c}j^i\end{array}\right.$$

Also

$$\boxed{\partial_\mu\partial^\mu\phi^\nu=\frac{1}{\varepsilon_0 c}j^\nu}\quad\text{mit}\quad\boxed{\begin{array}{l}\phi^0:=\phi\\ \phi^i:=cA^i\end{array}},\quad i=1,2,3$$

Da (j^μ) ein 4-Vektor ist, muss auch (ϕ^ν) wie ein 4-Vektor transformieren, da $\partial_\mu\partial^\mu$ Lorentz-invariant ist:

$$\begin{array}{ll}\phi'^0=\gamma(\phi^0-\beta\phi^1) & \\ \phi'^1=\gamma(\phi^1-\beta\phi^0) & \text{bzw.}\quad \phi'=\gamma(\phi-vA^1)\\ & \phantom{\text{bzw.}}\quad A'^1=\gamma(A^1-\frac{v}{c^2}\phi)\\ \phi'^2=\phi^2 & \\ \phi'^3=\phi^3 & \end{array}$$

Zurück zur Lorenz-Eichung:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi+\underline{\nabla}\cdot\underline{A}=0\iff\boxed{\partial_\mu\phi^\mu=0}\quad\text{Lorentz-invariant}$$

$$\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$$

$\Rightarrow$ Lorenz-Eichung ist Lorentz-invariant (im Gegensatz zur Coulomb-Eichung) !

Eichtransformation mit skalarer Fkt. φ:

(Erinnerung: so, dass Maxwell-Gl. u. Felder $\underline{E}$, $\underline{B}$ unverändert)

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{\underline{A}}=\underline{A}+\underline{\nabla}F\\ \tilde{\phi}=\phi-\frac{\partial}{\partial t}F\end{array}\right\}\iff\begin{array}{l}\tilde{\phi}^i=c\tilde{A}^i=cA^i+\partial_i(cF)\\ \phantom{\tilde{\phi}^i=c\tilde{A}^i}=cA^i-\partial^i(cF)\\ \tilde{\phi}^0=\phi^0-\partial_0(cF)=\phi^0-\partial^0(cF)\end{array}\quad(i=1,2,3)$$

$$\Rightarrow\boxed{\tilde{\phi}^\mu=\phi^\mu+\partial^\mu\varphi}$$

mit beliebiger (Lorentz-inv.), differenzierbarer, skalarer Fkt. $\varphi(x^\mu)$ des 4-Vektors (x^μ)

$= -ct$

Ausblick:

Feld-Tensor

Felder $\underline{E}$ und $\underline{B}$ folgen per Diff.-op. aus ϕ und $\underline{A}$:

$$\begin{cases} \underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A} \\ \underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A} \end{cases}$$

$\rightarrow$ Naheliegende Definition eines Feld-Tensors (Verhalten unter Lorentz-Trafos vgl. metrischer Tensor):

$$F^{\mu\nu} := \partial^\mu \phi^\nu - \partial^\nu \phi^\mu \quad , \; (\partial^\mu) \text{ 4-Gradient}, \; (\phi^\nu) = (\phi, c\underline{A}) \text{ 4-Potenzial}$$