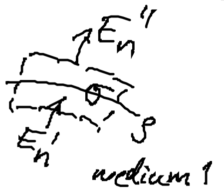
English Summary:

1) El. conductors:

- $\Phi(\underline{r}) = \text{const.}$ inside (zero)
- interface cond. (medium 1) $\Leftrightarrow$ medium 2 is equipot. surface
- surface charge determined by normal-comp. discontin. of $\underline{E}$ at the interface:

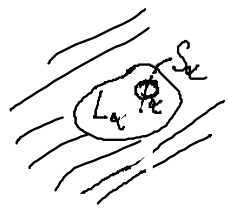
$$\underline{E}(\underline{r})\big|_S = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\underline{r})\,\underline{n} \Leftrightarrow E_n'' - E_n' = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\underline{r})\big|_S$$



(E_t continuous at S)

2) 1st main task of electrostatics w. cond. L_α, $\alpha = 1,\dots,n$ (surfaces S_α, potentials Φ_α) in outer space V: charge density $\rho(\underline{r})$:

boundary value problem:
(Dirichlet)



$V: \rho(\underline{r})$

find sol. of $\Delta\Phi(\underline{r}) = \dfrac{-\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}$

w. b.c. $\begin{cases} \Phi(\underline{r})\big|_{S_\alpha} = \Phi_\alpha \\ \lim\limits_{r\to\infty}\Phi(\underline{r}) = 0 \end{cases}$ (charge Q_α at cond. L_α)

Sol. $$\Phi(\underline{r}) = \int_V d^3r'\, G(\underline{r}-\underline{r}')\rho(\underline{r}') + \varepsilon_0 \sum_{\alpha=1}^{n}\Phi_\alpha \oint_{S_\alpha} d\underline{f}'\cdot\underline{\nabla}_{r'}G(\underline{r}-\underline{r}'), \quad (*)$$

inhom. w. hom. b.c. — hom. w. inhom. b.c.

$G(\underline{r}-\underline{r}')$ solves $\Delta_r G(\underline{r}-\underline{r}') = \dfrac{-1}{\varepsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')$

w. b.c. $\begin{cases} G(\underline{r}-\underline{r}'),\ \underline{r}'\in V,\ \underline{r}\in S_\alpha \\ \lim\limits_{r\to\infty} G(\underline{r}-\underline{r}') = 0 \end{cases}$

charges $$Q_\alpha = \oint_{S_\alpha} \underbrace{df\,\sigma}_{\varepsilon_0 d\underline{f}\cdot\underline{E}} = -\varepsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\underline{\nabla}\Phi$$

2. Grundaufgabe Elektrostatik mit Leitern

geg.: Leiter L_α, $\alpha = 1, \dots, n$, Oberflächen S_α und lad. Q_α
im Außenraum V mit Raumladungsdichte $\rho(\underline{r})$

ges.: $\Phi(\underline{r})$, Φ_α

Lsg.: Führe Problem zurück auf Aufg. #1
durch Zshang zw. Q_α und ϕ_α:

$$Q_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} C_{\alpha\beta} \Phi_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \dots, n)$$

mit sog. Kapazitätskoeffizienten $C_{\alpha\beta}$

Beweis:

$$Q_\alpha = -\varepsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\underline{f} \cdot \underline{\nabla} \Phi \qquad \Big| \text{ Lsg. (*) für } \Phi(\underline{r}) \text{ eins.}$$

$$= -\varepsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\underline{f} \cdot \underline{\nabla}_r \int_V d^3r' \, G(\underline{r} - \underline{r}') \rho(\underline{r}') \qquad \Big| \text{ Gaußscher Integralsatz}$$

$$- \varepsilon_0^2 \oint_{S_\alpha} d\underline{f} \cdot \underline{\nabla}_r \sum_{\beta=1}^{n} \underbrace{\Phi_\beta}_{\text{Konst.}} \oint_{S_\beta} d\underline{f}' \cdot \underline{\nabla}_{r'} G(\underline{r} - \underline{r}')$$

$$= -\varepsilon_0 \int_{L_\alpha} d^3r \int_V d^3r' \underbrace{\Delta_r G(\underline{r} - \underline{r}')}_{= -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\underline{r} - \underline{r}') = 0 \text{ für } \underline{r} \in L_\alpha, \underline{r}' \in V \text{ (Außenraum)}} \rho(\underline{r}')$$

$$- \sum_{\beta=1}^{n} \Phi_\beta \underbrace{\varepsilon_0^2 \oint_{S_\alpha} d\underline{f} \cdot \underline{\nabla}_r \oint_{S_\beta} d\underline{f}' \cdot \underline{\nabla}_{r'} G(\underline{r} - \underline{r}')}_{=: -C_{\alpha\beta}}$$

$$= \sum_{\beta=1}^{n} C_{\alpha\beta} \Phi_\beta$$

Aus Symmetrie $G(\underline{r} - \underline{r}') = G(\underline{r}' - \underline{r})$ folgt

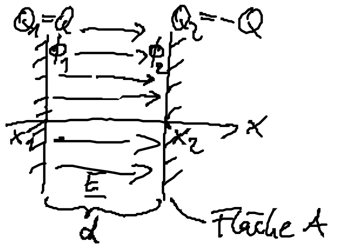
$$\boxed{C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}}$$

Einheit d. Kapazität: $1\,F = 1\,\frac{C}{V}$ (1 Farad) (M. Faraday, 1791–1867)

Betrachte speziell einzelnen Leiter mit Φ_L als Pot.:

$$C = \frac{Q}{\Phi_L} \qquad \text{(Selbst-) Kapazität des Leiters}$$

Bsp.: Plattenkondensator



$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= C_{11}\Phi_1 + C_{12}\Phi_2 \\ Q_2 &= C_{21}\Phi_1 + C_{22}\Phi_2 \end{aligned}\right\} C_{12} = C_{21} =: C'$$

u. wg. Symm. $1 \Leftrightarrow 2$: $C_{11} = C_{22} =: C$

Spezialfall $Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} Q &= C\Phi_1 + C'\Phi_2 \\ -Q &= C'\Phi_1 + C\Phi_2 \\ \hline 0 &= (C+C')(\Phi_1+\Phi_2) \Rightarrow C' = -C, \end{aligned}$$

$$C = \frac{Q}{\Phi_1 - \Phi_2} \qquad (1)$$

El. Feld:

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \varepsilon_0 E = \text{const.} \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \Phi(x) = -Ex + \Phi_0$$

$$\Rightarrow \Phi_1 - \Phi_2 = -E\underbrace{(x_1 - x_2)}_{-d} \qquad (3)$$

Aus (1), (2), (3) folgt: $\boxed{C = -C' = \frac{Q}{Ed} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}}$

Betrachte Lsg. d. 2. Grundaufg.: Inverse d. Kapazitätsmatrix

$$\Phi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} \underbrace{(C^{-1})_{\alpha\beta}}_{\left(\neq \frac{1}{C_{\alpha\beta}}\right)} Q_\beta$$

eingesetzt in die Lsg. d. 1. Grundaufg. liefert $\Phi(\underline{r})$ für geg. Q_β, $\rho(\underline{r})$.

Energie des Feldes im Außenraum V, ohne Raumlad.dichte ($\rho = 0$):

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V d^3r\,(E(\underline{r}))^2$$

Für differentielle Änderung d. RB auf L_α,

$$\begin{cases} Q_\alpha \to Q_\alpha + \delta Q_\alpha \\ \phi_\alpha \to \phi_\alpha + \delta\phi_\alpha, \end{cases}$$

Lsg. $\phi(\underline{r}) \to \phi(\underline{r}) + \delta\phi(\underline{r})$

Räuml. Anordnung unverändert $\to$ $\underline{\nabla}$ u. δ können vertauscht w.

$$\delta W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V d^3r\; 2\underbrace{\underline{E}(\underline{r})}_{-\underline{\nabla}\phi(\underline{r})}\cdot\delta\underline{E}(\underline{r})$$

$$= -\varepsilon_0 \int_V d^3r\,(\underline{\nabla}\phi(\underline{r}))\cdot\delta\underline{E}(\underline{r}) \qquad \Big|\ \underline{\nabla}\phi\cdot\delta\underline{E} = \underline{\nabla}\cdot(\phi\delta\underline{E}) - \phi\underbrace{\underline{\nabla}\cdot\delta\underline{E}}_{\substack{=\delta(\underline{\nabla}\cdot\underline{E})\\ =0 \text{ in } V\\ \text{da } \rho(\underline{r})\overset{!}{=}0}}$$

$$= -\varepsilon_0 \int_V d^3r\;\underline{\nabla}\cdot(\phi\delta\underline{E}) \qquad \Big|\ \text{Gauß'scher Int.-satz, VZ wg. } \partial V = \bigcup_{\alpha=1}^{n} S_\alpha$$

$$= \varepsilon_0 \sum_\alpha \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot(\phi(\underline{r})\delta\underline{E}(\underline{r})) \qquad \Big|\ \phi\big|_{S_\alpha} = \phi_\alpha$$

$$= \varepsilon_0 \sum_\alpha \phi_\alpha \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\delta\underline{E} \qquad \Big|\ \varepsilon_0\oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\underline{E} = Q_\alpha$$

$$= \sum_\alpha \phi_\alpha \delta Q_\alpha \qquad \Big|\ Q_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} C_{\alpha\beta}\phi_\beta$$

$$= \sum_{\alpha\beta}\phi_\alpha C_{\alpha\beta}\delta\phi_\beta$$

$$\overset{\text{Symm.}}{=} \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\Big\{C_{\alpha\beta}\phi_\alpha\delta\phi_\beta + \underset{\substack{\parallel\\ C_{\alpha\beta}}}{C_{\beta\alpha}}\phi_\beta\delta\phi_\alpha\Big\}$$

$$= \delta\Big\{\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}C_{\alpha\beta}\phi_\alpha\phi_\beta\Big\}$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}C_{\alpha\beta}\phi_\alpha\phi_\beta \qquad \text{Feldenergie}$$

2. Stationäre Ströme und Magnetfeld

2.1 Kontinuitätsgleichung

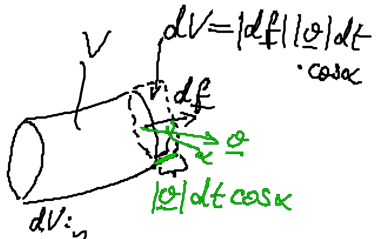
Bewegte Ladungsträger $\to$ el. Strom $I = \frac{dQ}{dt}$

Experimentelle Erfahrung: Erhaltung der el. Ladung

$$Q(t) = \int_V d^3r\, \rho(\underline{r},t)$$

$\rightarrow$ globaler Erhaltungssatz

$$\frac{dQ}{dt} := \frac{d}{dt}\int_V d^3r\, \rho(\underline{r},t) = -\oint_{\partial V} \delta J$$



$$\delta J = \frac{\rho\, dV}{dt} = \rho\, \frac{|\underline{v}|\,dt\,|d\underline{f}|\cos\alpha}{dt}$$

$$= \rho\, \underline{v}\cdot d\underline{f}$$

dV: (Änderung d. Volumens mit Ladungsträgern)

(Ladung, die pro Zeit durch $d\underline{f}$ aus V herausströmt)

El. Stromdichte $\underline{j}(\underline{r},t) := \rho(\underline{r},t)\,\underline{v}(\underline{r},t)$ (lokale Größe)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int_V d^3r\, \rho(\underline{r},t) = -\oint_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{j}(\underline{r},t) = -\int_V d^3r\, \operatorname{div}\underline{j} \quad \text{für belieb. } V$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{r},t) + \operatorname{div}\underline{j} = 0} \quad \text{Kontinuitätsgl.}$$

lokaler Erhaltungssatz

speziell: stationäre Ladungsverteilung $\Rightarrow$

$\operatorname{div}\underline{j} = 0$ ($\nRightarrow$ nicht notwendig $\underline{j} = 0$)

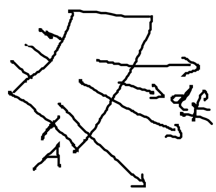
quellenfreie Stromdichte

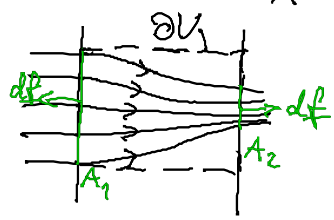
Allg. Struktur Kontinuitätsgl. z.B. für Masse (Hydrodyn.), Energie (keine Dissipation), Impuls, Wahrscheinlichkeit (QM)

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}\underline{j} = 0, \quad \underline{j} = \rho\,\underline{v}$$

Stationäre Ladungsverteilung, $\operatorname{div}\underline{j} = 0$:

Strom $J = \int_A \underline{j}\cdot d\underline{f}$





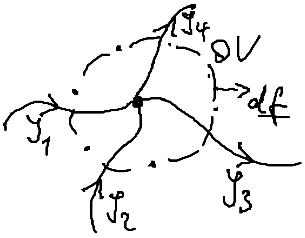
$$0 = \int_V d^3r\, \operatorname{div}\underline{j} = \int_{\partial V} \underline{j}\cdot d\underline{f}$$

$$= \int_{A_1} d\vec{f} \cdot \vec{j} + \int_{A_2} d\vec{f} \cdot \vec{j}$$

$$= J_1 - J_2$$

$\Rightarrow J_1 = J_2$ (Strom konstant)

- <u>Kirchhoff'sche Knotenregel</u>:



$$0 = \int_V d^3r \, \mathrm{div}\, \vec{j} = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{j}$$

$$= -J_1 - J_2 + J_3 + J_4$$

oder

$$\boxed{\sum J_{in} = \sum J_{out}}$$