English Summary:

Retarded potentials

$$\boxed{\Box u = -f(\underline{r},t)} \Rightarrow u(\underline{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')\, f(\underline{r}',t')$$

$$\left(\begin{matrix} u=\phi & \Rightarrow f = \rho/\epsilon_0 \\ u = \underline{A} & \Rightarrow f = \mu_0 \underline{j} \end{matrix}\right)$$

causal Green's fct.: $$\boxed{G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = \begin{cases} \frac{1}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|}\,\delta\!\left(t-t'-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right) & t>t' \\ 0 & t<t' \end{cases}}$$

$$\Box G = -\delta(\underline{r}-\underline{r}')\,\delta(t-t')$$

4.3 Multipolstrahlung

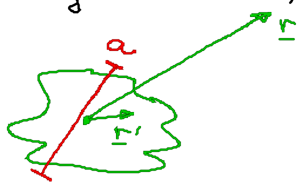
Ziel: Die retardierten Potenziale sollen für räumlich lokalisierte zeitabhängige Ladungs- u. Stromverteilungen analog zu den stat. Multipolentwicklungen (§1.4, 2.4) für $r \gg r'$ entwickelt werden.

Vor.: Lorenz-Eichung $\dot{\phi} + c^2 \underline{\nabla}\cdot\underline{A} = 0$ $\qquad \epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$

$\Rightarrow \underline{A}(\underline{r},t)$ ergibt $\phi(\underline{r},t)$ u. somit $\underline{E}(\underline{r},t)$, $\underline{B}(\underline{r},t)$

1. Näherung: $\boxed{r \gg a}$ (Ausdehnung der Quelle)

Mit $$\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}(\underline{r}\cdot\underline{r}') + \ldots$$



$$\underline{A}(\underline{r},t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, \underline{j}\!\left(\underline{r}', t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right) + \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, (\underline{r}\cdot\underline{r}')\,\underline{j}\!\left(\underline{r}', t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)$$

2. Näherung: $$t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c} \approx \underbrace{t-\frac{r}{c}}_{=:\tau} + \frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{cr} + \ldots$$

falls $\tau \gg \frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{cr} \sim \frac{a}{c}$ (relative Retardierung innerhalb der Quelle)

$a \sim$ Ausdehnung der Quelle

$\tau \sim$ charakt. Retardierungszeit Beob. – Schwerpunkt der Quelle (z.B. harmon. Erregung $\underline{j} \sim e^{i\omega t}$:

$$\omega\tau \overset{!}{=} 2\pi \Rightarrow \tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{ck} = \frac{\lambda}{c} \text{ Periode}$$

$\boxed{a \ll \lambda}$ Wellenlänge

$$\Rightarrow \underline{j}\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right) \approx \underline{j}(\underline{r}', \underbrace{t - \frac{r}{c}}_{\tau}) + \frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{cr} \frac{\partial \underline{j}(\underline{r}',\tau)}{\partial \tau}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{A}(\underline{r},t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}',\tau) + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int d^3r' (\underline{r}\cdot\underline{r}')\left(1 + \frac{r}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\right) \underline{j}(\underline{r}',\tau)}$$

niedrigste Ordnung (verschwindet nicht, da im Gegensatz zur Magnetostatik $\underline{\nabla}\cdot\underline{j} \neq 0$)

Mit $\underline{\nabla}_{r'} [x_k' \underline{j}] = x_k' \underbrace{(\underline{\nabla}_{r'} \cdot \underline{j}(\underline{r}',\tau))}_{-\dot{\varrho}(\underline{r}',\tau)} + j_k$ mit $\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \underline{\nabla}_{r'} (x_k' \underline{j}) \overset{\text{Gauß}}{=} 0$

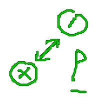
folgt $\int d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}',\tau) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \underline{r}' \dot{\varrho}(\underline{r}',\tau) = \dot{\underline{p}}(\tau)$

mit el. Dipolmoment $\underline{p} = \int d^3r' \, \underline{r}' \varrho(\underline{r}',\tau)$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{A}^{(1)}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\underline{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)} \quad \text{el. Dipolstrahlung}$$

Hertz'scher Dipol (Heinrich Hertz 1857 - 1894):

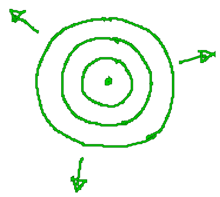
$$\underline{p}(t) = \underline{p}_0 e^{-i\omega t}$$



$$\underline{A}^{(1)}(\underline{r},t) = \frac{-i\omega\mu_0 \underline{p}_0}{4\pi} \frac{e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})}}{r}$$

$$= \frac{-i\omega\mu_0 \underline{p}_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$$

Kugelwellen



$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\underline{r},t) \overset{\text{Lorenz-Eichung}}{=} -\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} \underline{\nabla}\cdot\underline{A} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \underline{\nabla}\cdot\left\{\frac{1}{r}\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\}$$

$$\phi(\underline{r},t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\left\{\frac{1}{r}\underline{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\} + \underbrace{\phi_{stat}(\underline{r})}_{0}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\underbrace{\frac{1}{cr^2}\underline{r}\cdot\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}_{\sim\frac{1}{r}} + \underbrace{\frac{1}{r^3}\underline{r}\cdot\underline{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)}_{\sim\frac{1}{r^2}}\right\}$$

Grenzfälle

(i) Fernzone (Wellenzone): $r \gg \lambda \,(\gg a) \Leftrightarrow \boxed{kr \gg 1}$

$\Leftrightarrow \frac{\omega}{c} r \gg 1$

$$\boxed{\phi(\underline{r},t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{cr^2}\underline{r}\cdot\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}$$

$\frac{1}{c}\dot{p} \sim \frac{\omega}{c}p \gg \frac{p}{r}$

Retardierung wichtig!

(ii) Nahzone (quasistatischer Bereich): $\lambda \gg r \,(\gg a)$ $\boxed{kr \ll 1}$

$$\boxed{\phi(\underline{r},t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\underline{r}\cdot\underline{p}(t)} \quad \left(-\frac{1}{r^3}\frac{r}{c}\underline{r}\cdot\dot{\underline{p}}(t) + \frac{1}{cr^2}\underline{r}\cdot\dot{\underline{p}}(t)\right)$$

Entw. nach $p(t)$

Retardierung kompensiert $\dot{p}$-Term

instantanes Dipolpotenzial!

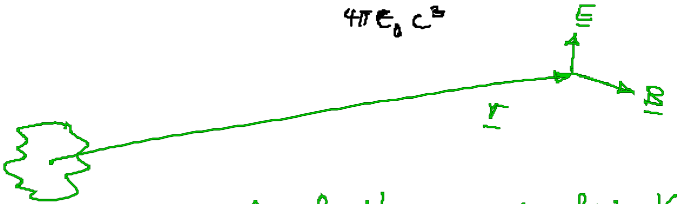
Berechnung der Felder in Fernfeldnäherung:

$$\underline{B}(\underline{r},t) = \nabla\times\underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left(\frac{1}{r}\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{1}{r^2}\left[\ddot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\underline{r}\right] + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\underline{E}(\underline{r},t) = -\nabla\phi - \dot{\underline{A}}(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{1}{r^3}\left[\ddot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\underline{r}\right]\times\underline{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Es gilt: $\underline{B}\times\left(\frac{\underline{r}}{r}\right) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi c}}_{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3}}\frac{1}{r^3}(\ddot{\underline{p}}\times\underline{r})\times\underline{r} = \frac{1}{c}\underline{E}$



$\underline{r}, \underline{E}, \underline{B}$ bilden Rechtssystem

Ausbreitung wie freie Kugelwelle (nur in der Fernzone!)

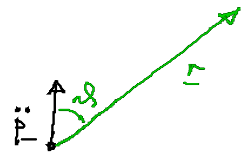
NB: In der Nahzone gilt immer noch $\underline{B} \perp \underline{r}$
aber $\underline{E}$ hat longitud. Kompon. $\underline{E}_{\parallel} \parallel \underline{r}$
neben $\underline{E}_{\perp} \perp \underline{r}$

Poynting-Vektor (Energiestromdichte):

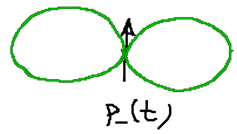
$$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H} = -\frac{1}{\mu_0} \underline{B} \times \underline{E} = -\frac{c}{\mu_0 r} \underline{B} \times (\underline{B} \times \underline{r})$$

$$= -\frac{c}{\mu_0 r} \{ \underbrace{(\underline{B} \cdot \underline{r})}_{0} \underline{B} - B^2 \underline{r} \}$$

$$= \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \frac{1}{r^4} \underbrace{\left(\underline{\ddot{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \underline{r} \right)^2}_{|\underline{\ddot{p}}|^2 r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{1}{r} \underline{r}$$



$$\boxed{\underline{S} = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} |\underline{\ddot{p}}|^2 \frac{1}{r^2} \sin^2 \vartheta \frac{\underline{r}}{r}}$$



$\left(\hat{=} \; \ell = 1, \; m = 0 \right)$

Abstrahl-Charakteristik des Hertz'schen Dipol: stark richtungsabhängig!

$\underline{p}(t) = \underline{p}_0 e^{-i\omega t}$: $|\underline{\ddot{p}}|^2 = p_0^2 \omega^4$) stark frequenzabh.!

gute Näherung für eine lineare Antenne $I(t)$