English Summary:

Lagrange fct. $L = \frac{m}{2}v^2 + q(\underline{v}\cdot\underline{A} - \phi)$ $\Rightarrow$ $\underline{F} = q(\underline{E} + \underline{v}\times\underline{B})$
Lorentz force

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{E}(\underline{r},t) &= -\frac{\partial}{\partial t}\underline{A}(\underline{r},t) - \underline{\nabla}\phi(\underline{r},t)\\ \underline{B}(\underline{r},t) &= \underline{\nabla}\times\underline{A}(\underline{r},t)\end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ homogeneous Maxwell's eqs. satisfied

energy balance: $\boxed{\frac{\partial}{\partial t}w + \underline{\nabla}\cdot\underline{S} = -\underline{j}\cdot\underline{E}}$

energy density $w = \frac{1}{2}(\underline{E}\cdot\underline{D} + \underline{B}\cdot\underline{H})$
energy flux density $\underline{S} = \underline{E}\times\underline{H}$ (Poynting vector)
power density $\sigma = -\underline{j}\cdot\underline{E}$ (lost power)

Anwendung: Beschleunigung von Teilchen durch $\underline{E}, \underline{B}$:
Kraft auf die Ladung q: $\underline{F} = q(\underline{E} + \underline{v}\times\underline{B})$
Kraftdichte: $\underline{f} = \rho(\underline{E} + \underline{v}\times\underline{B})$
Leistungsdichte der Felder auf Ladungsdichte ρ:

$$\underline{f}\cdot\underline{v} = \underbrace{\rho\underline{v}}_{\underline{j}}\cdot\underline{E} + \underbrace{\rho\underline{v}\cdot(\underline{v}\times\underline{B})}_{0} = \underline{j}\cdot\underline{E}$$

vom Feld auf Ladungen übertragen (= Verlustdichte der Feldenergie)

(Magnetfeld leistet keine Arbeit, da $\underline{F} \perp \underline{v}$)

Feldenergie ist keine Erhaltungsgröße!

1. Beispiel: Ohm'sches Gesetz $\underline{j} = \sigma\underline{E}$ mit konst. Leitfähig. $\sigma > 0$
(phänomenolog. Materialgesetz! gilt in Metallen u. Halbleitern für hinreichend kleine Felder $\underline{E}$)

$\Rightarrow$ Energiebilanz $\frac{\partial}{\partial t}w + \underline{\nabla}\cdot\underline{S} = -\sigma\underline{E}^2 < 0$
d.h. stets Verlust von Feldenergie
(Konsequenz des 2. Hauptsatzes der Thermodyn.)

E-Dynamik ist zeitumkehrinvariant
$\updownarrow$

Ohm'sches Gesetz <u>nicht</u> zeitumkehrinvariant

$t \to -t$

$\underline{j} \to -\underline{j}$

aber $\underline{E} \to \underline{E}$

$\sigma \underline{E}^2$ wird als Joule'sche Wärme im Leiter dissipiert

(Irreversibilität!)

<u>2. Beispiel</u>: Antennenabstrahlung (offenes System)

$\underline{j}$ in der metallischen Antenne ist dem Wechselfeld $\underline{E}$ außerhalb der Antenne entgegengesetzt $\Rightarrow \underline{j} \cdot \underline{E} < 0$

$\Rightarrow$ Energiegewinn des Feldes

3.5 Impulsbilanz

Aus den Maxwell-Gln. folgt eine weitere Bilanzgl. für den Impulstransport durch das el. magn. Feld:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\underline{D} \times \underline{B}) = \underbrace{\underline{\dot{D}}}_{\underline{\nabla} \times \underline{H} - \underline{j}} \times \underline{B} + \underline{D} \times \underbrace{\underline{\dot{B}}}_{-\underline{\nabla} \times \underline{E}}$$

$$= -\frac{1}{\mu_0} \underline{B} \times (\underline{\nabla} \times \underline{B}) - \underline{j} \times \underline{B} - \epsilon_0 \underline{E} \times (\underline{\nabla} \times \underline{E})$$

Es gilt die Vektorumformung

$$\underline{B} \times (\underline{\nabla} \times \underline{B}) = \frac{1}{2} \underline{\nabla} (\underline{B} \cdot \underline{B}) - (\underline{B} \cdot \underline{\nabla}) \underline{B}$$

$$= \underline{\nabla} \cdot \left\{ \underline{\underline{1}} \, \frac{1}{2} (\underline{B} \cdot \underline{B}) - \underline{B} \otimes \underline{B} \right\} + \underline{B} \underbrace{(\underline{\nabla} \cdot \underline{B})}_{0}$$

wobei $\underline{\underline{1}}$ der Einheitstensor 2. Stufe

$\underline{B} \otimes \underline{B}$ das Tensorprodukt (dyadisches Produkt)

und $\underline{\nabla} \cdot \{\ldots\}$ die Divergenz eines Tensors $\underline{\underline{T}}$ 2. Stufe ist.

(In Komponenten $(\underline{B} \otimes \underline{B})_{ij} := B_i B_j$

$$(\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{T}})_\beta := \partial_\alpha T_{\alpha\beta}$$ (Einsteinkonvention!)

Analog: $\underline{E} \times (\underline{\nabla} \times \underline{E}) = \underline{\nabla} \cdot \{\underline{\underline{1}}\, \frac{1}{2}(\underline{E}\cdot\underline{E}) - \underline{E}\otimes\underline{E}\} + \underline{E}\,\underbrace{(\underline{\nabla}\cdot\underline{E})}_{\varrho/\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\underline{D}\times\underline{B}) + \underline{\nabla}\cdot\left\{\underline{\underline{1}}\,\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) - \varepsilon_0 \underline{E}\otimes\underline{E} - \frac{1}{\mu_0}\underline{B}\otimes\underline{B}\right\}$$

$$= -\underbrace{(\varrho\underline{E} + \underline{j}\times\underline{B})}$$

Kraftdichte $\underline{f}$, die von den Feldern auf Ladungsdichte ϱ u. Stromdichte $\underline{j}$ ausgeübt wird

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\underline{g} + \underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{T}} = -(\varrho\underline{E} + \underline{j}\times\underline{B})}$$ Bilanzgl. für Impulstransport

mit $\underline{g} := \underline{D}\times\underline{B}$ Impulsdichte des Feldes

(Nach Newton $\frac{d\underline{p}}{dt} = \underline{F} \Rightarrow \frac{d}{dt}\underline{g} = \underline{f}$)

$$\underline{\underline{T}} := \underline{\underline{1}}\,\frac{1}{2}(\underline{E}\cdot\underline{D} + \underline{B}\cdot\underline{H}) - \underline{E}\otimes\underline{D} - \underline{B}\otimes\underline{H}$$

Impulsstromdichte-Tensor des Feldes

(Maxwell'scher Spannungstensor

in Komponenten:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}(\underline{E}\cdot\underline{D} + \underline{B}\cdot\underline{H}) - E_\alpha D_\beta - B_\alpha H_\beta$$

(Stromdichte in α-Richtung der β-Komponente der Impulsdichte

Stromdichte

$\underline{g}$ Impulsdichte

$$\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{T}} = T_{\alpha\alpha} = \frac{3}{2}(\underline{E}\cdot\underline{D} + \underline{B}\cdot\underline{H}) - (\underline{E}\cdot\underline{D} + \underline{B}\cdot\underline{H})$$

$$= \frac{1}{2}(\underline{E}\cdot\underline{D} + \underline{B}\cdot\underline{H}) = w \quad \text{(Energiedichte)}$$

$\underline{\underline{T}}$ ist symmetrisch: $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}g_\beta + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}T_{\alpha\beta} = -f_\beta}$$ beschreibt Impulsaustausch zwischen Feld u. geladenen Teilchen

__Bem.__ : Eine analoge Bilanzgl. gilt für die __Drehimpulsdichte__ des Feldes; sie beschreibt Drehimpulsaustausch zwischen Feld u. geladenen Teilchen.

3.6 Eichinvarianz

Darstellung der Felder $\underline{E}, \underline{B}$ durch $\phi(\underline{r},t)$, $\underline{A}(\underline{r},t)$:

$$\boxed{\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}\,, \qquad \underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A}}$$

__Frage__ : allgemeinste Trafo $\phi \to \phi'$, $\underline{A} \to \underline{A}'$, welche $\underline{E}, \underline{B}$ invariant lässt?

$$\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A} \overset{!}{=} -\underline{\nabla}\phi' - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}'$$

$$\underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A} \overset{!}{=} \underline{\nabla}\times\underline{A}' \quad \Rightarrow \underline{A}' = \underline{A} + \underline{\nabla}G(\underline{r},t)$$

$$(\underline{\nabla}\times\underline{\nabla}G \equiv 0)$$

$$\Rightarrow -\underline{\nabla}\phi - \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\underline{A}} \overset{!}{=} -\underline{\nabla}\phi' - \frac{\partial}{\partial t}(\cancel{\underline{A}} + \underline{\nabla}G)$$

$$\Rightarrow \underline{\nabla}\left(\phi' - \phi + \frac{\partial}{\partial t}G\right) = 0$$

$$\Rightarrow \phi' - \phi + \frac{\partial}{\partial t}G = g(t) \quad \text{unabh. von } \underline{r}$$

Mit $F(\underline{r},t) := G(\underline{r},t) - \int_{t_0}^{t} dt'\, g(t')$

ergibt sich

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{A}'(\underline{r},t) &= \underline{A}(\underline{r},t) + \underline{\nabla}F(\underline{r},t) \\ \phi'(\underline{r},t) &= \phi(\underline{r},t) - \frac{\partial}{\partial t}F(\underline{r},t) \end{aligned}}$$

mit __beliebiger__ Eichfkt. $F(\underline{r},t)$

physikal. relevant: $\oint_{\partial F} d\underline{s}\cdot\underline{A} = \int_F d\underline{f}\cdot\underline{B} = \Phi$

Durch $\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}$, $\underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A}$ sind die homog. Maxwell-Gln. erfüllt

$$\left(\underline{\nabla}\times\underline{E} = -\underbrace{\underline{\nabla}\times\underline{\nabla}\phi}_{0} - \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\underline{\nabla}\times\underline{A}}_{\underline{B}}\,, \quad \underline{\nabla}\cdot\underline{B} = \underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{A}) \equiv 0\right)$$

Umkehrung:

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\,\underline{A}\;;\ \underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A}$$

$$\underline{\nabla}\times\underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\underline{B} = -\underline{\nabla}\times\frac{\partial}{\partial t}\underline{A} \Rightarrow \underline{\nabla}\times\left(\underline{E}+\frac{\partial}{\partial t}\underline{A}\right)=0$$

$$\Rightarrow \exists\phi:\ \underline{E}+\frac{\partial}{\partial t}\underline{A} = -\underline{\nabla}\phi$$

Wähle nun Eichung, so dass die inhomogenen Maxwell-Gln. besonders einfach werden:

Ziel: Entkopplung der Dgln. für $\underline{A}$ und ϕ

(i) Lorenz-Eichung (Ludwig V. Lorenz, dän. Physiker) 1867

$\Updownarrow$ Hendrik A. Lorentz, holl. Physiker

$$\boxed{\underline{\nabla}\cdot\underline{A}+\epsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\phi=0}$$

Hiermit werden die Feldgln. entkoppelt

a) $-\underline{\nabla}\cdot\underline{E} = \underline{\nabla}\left(\underline{\nabla}\phi+\frac{\partial}{\partial t}\underline{A}\right) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$

$$\Delta\phi+\frac{\partial}{\partial t}\underline{\nabla}\cdot\underline{A} = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

Lorenz-Eichung:

$$\boxed{\Delta\phi-\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho}$$

b) $\frac{1}{\mu_0}\underline{\nabla}\times\underline{B}-\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\underline{E} = \underline{j}$

$$\underbrace{\underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{A})}_{\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{A})-\Delta\underline{A}}+\epsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\underline{\nabla}\phi+\frac{\partial}{\partial t}\underline{A}\right) = \mu_0\underline{j}$$

$$\Delta\underline{A}-\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{A}-\underline{\nabla}\underbrace{\left(\underline{\nabla}\cdot\underline{A}+\epsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\phi\right)}_{0\ \text{Lorenz-Eichung}} = -\mu_0\underline{j}$$

$$\boxed{\Delta\underline{A}-\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{A} = -\mu_0\underline{j}}$$

Zus.fassung mit d'Alembert-Op. $\Box := \Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

$$\boxed{\begin{aligned} \Box \phi &= -\frac{1}{\epsilon_0}\rho \\ \Box \underline{A} &= -\mu_0 \underline{j} \end{aligned}}$$

<u>inhomogene</u>
<u>Wellengln.</u>
(entkoppelt!)

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.994 \times 10^8 \ \frac{m}{s}$$

<u>Lichtgeschwindigkeit</u>

(= Ausbreitungsgeschwindig. el. magn. Wellen im Vakuum)