English Summary: **Electrostatics**

$$\boxed{\Delta\phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\underline{r})} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\epsilon_0 \underline{\nabla}\cdot\underline{E}(\underline{r}) = \rho(\underline{r}) \\ \underline{\nabla}\times\underline{E}(\underline{r}) = 0\end{array}} \begin{array}{l}\Leftrightarrow \epsilon_0 \oint_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{E}(\underline{r}) = \int_V d^3r' \rho(\underline{r}') \\ \Leftrightarrow \underline{E} = -\underline{\nabla}\phi \Leftrightarrow \oint_{\partial F} \underline{E}\cdot d\underline{s} = 0\end{array}$$

Poisson eq. — curl-free

sol. by Green's fct: $\Delta_r G(\underline{r}-\underline{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')$

$$\phi(\underline{r}) = \int d^3r'\, G(\underline{r}-\underline{r}')\rho(\underline{r}')$$

for boundary cond. $\phi \xrightarrow{r\to\infty} 0$: $G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$

Abstraktes Lösungsschema:

$$\boxed{\Delta\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho} \xrightarrow[\text{Inversierung des Diff. op.}]{\text{Lösung durch}} \boxed{\phi = \tilde{G}\rho}$$

Diff. op. Δ — Green'scher Op. $\tilde{G}$

$\Downarrow$

Fourier-Trafo

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\, \hat{\phi}(\underline{k})\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}$$

$$\phi(\underline{r}) = \int d^3r'\, G(\underline{r}-\underline{r}')\rho(\underline{r}')$$

Fourier-Rücktrafo

$\Downarrow$ $\Uparrow$

$$\boxed{-k^2\hat{\phi} = -\frac{1}{\epsilon_0}\hat{\rho}} \Longrightarrow \boxed{\hat{\phi} = \hat{G}\hat{\rho}} \qquad \hat{G} := \frac{1}{\epsilon_0 k^2}$$

1.4 Elektrische Multipol-Entwicklung

Betrachte räumlich begrenzte Ladungsverteilung $\rho(\underline{r}')$ in der Umgebung von $\underline{r}'=0$

Frage: asymptotisches Verhalten von $\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$

Methode: Entwicklung des Integranden in eine Taylorreihe für $r \gg r'$:

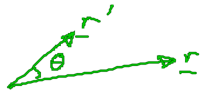
$$G(\underline{r}-\underline{r}') = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}(\underline{r}'\cdot\underline{\nabla}_r)^\ell G(\underline{r})$$

$$\phi(\underline{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}\int d^3r'\,(\underline{r}'\cdot\underline{\nabla}_r)^\ell G(\underline{r})\rho(\underline{r}')$$

explizit mit $G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0|\underline{r}-\underline{r}'|}$ Entwicklung:

$$\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = (r^2 - 2\underline{r}\cdot\underline{r}' + r'^2)^{-1/2} = \frac{1}{r}\left(1 - 2\frac{r'}{r}\cos\theta + \frac{r'^2}{r^2}\right)^{-1/2}$$

Durch die für $r' < r$, $|\zeta| < 1$ konvergente Reihe:



$$\underbrace{\left(1 - 2\frac{r'}{r}\zeta + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right)^{-1/2}}_{\text{Erzeugende}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell} P_\ell(\zeta)$$

sind die Legendre-Polynome $P_\ell(\zeta)$ definiert

$$P_\ell(\zeta) = \frac{1}{\ell!}\left[\frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell}\left(1 - 2t\zeta + t^2\right)^{-1/2}\right]_{t=0}$$

insbesondere

$$P_0(\zeta) = 1$$
$$P_1(\zeta) = \zeta = \cos\theta$$
$$P_2(\zeta) = \frac{1}{2}(3\zeta^2 - 1) = \frac{1}{4}(3\cos(2\theta) + 1)$$

also

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\int d^3r'\, \rho(\underline{r}') \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell} P_\ell(\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty} Q_\ell\, r^{-\ell-1}$$

mit $Q_\ell = \int d^3r'\, r'^{\ell}\rho(\underline{r}')P_\ell(\cos\theta)$ „2^ℓ - Pol"

Entwicklung nach Potenzen von r!

Für stark lokalisierte Ladungsverteilungen ($r' \ll r$) konvergiert die Reihe schnell:

$\underline{\ell = 0}$: $\phi^{(0)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_0}{r}$ $\quad Q_0 = \int d^3r'\, \rho(\underline{r}')$ el. Monopol (Gesamtladung)

fällt am langsamsten ab

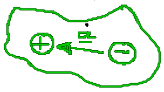
$\Rightarrow$ Ladungsverteilung wirkt in großer Entfernung wie Punktladung

$\underline{\ell = 1}$: $\phi^{(1)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\underline{p}\cdot\underline{r}}{r^3}$ $\quad Q_1 = \int d^3r'\, \rho(\underline{r}')\underbrace{r'\cos\theta}_{\frac{\underline{r}'\cdot\underline{r}}{r}} = \frac{\underline{p}\cdot\underline{r}}{r}$

$$\underline{p} := \int d^3r'\, \rho(\underline{r}')\,\underline{r}'$$

fällt $\sim \frac{1}{r^2}$ ab, (el. Dipolmoment)

wichtigster Term für insgesamt neutrale Körper ($Q_0 = 0$)



<u>Beispiel</u>: 2 Punktladungen $q, -q$ bei $\underline{r}_1, \underline{r}_2$

$$\rho(\underline{r}') = q\left[\delta(\underline{r}'-\underline{r}_1) - \delta(\underline{r}'-\underline{r}_2)\right]$$

$$Q_0 = 0\,, \quad \underline{p} = q(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) = q\underline{d}$$

<u>Feld des Dipolpotenzials</u>:

$$E_i = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\partial_i \frac{p_k x_k}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{3x_i\, p_k x_k}{r^5} - \delta_{ik}\frac{p_k}{r^3}\right)$$

(Summationskonv.!)

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r^5}\left[3(\underline{p}\cdot\underline{r})\underline{r} - r^2\underline{p}\right]$$

$$\sim \frac{1}{r^3} \quad \text{für } r \to \infty$$

<u>$l=2$</u>: $\phi^{(2)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_2}{r^3}\,, \quad Q_2 = \frac{1}{2}\int d^3r'\,\rho(\underline{r}')(r')^2(3\cos^2\theta - 1)$

$$= \frac{1}{2}\int d^3r'\,\rho(\underline{r}')\Big(3\underbrace{\frac{\underline{r}'\cdot\underline{r}}{r}\,\frac{\underline{r}'\cdot\underline{r}}{r}}_{\frac{x_k'x_k\, x_l' x_l}{r^2}} - r'^2\Big)$$

$$Q_2 = \frac{1}{2r^2}\underbrace{\int d^3r'\,\rho(\underline{r}')\left(3x_k'x_l' - r'^2\delta_{kl}\right)}_{Q_{kl}\ \text{el. Quadrupolmoment}} x_k x_l$$

(spurfreier, symm. Tensor: $\sum_{i=1}^{3} Q_{ii} = \int d^3r'\,\rho(\underline{r}')\left(3(r')^2 - 3(r')^2\right) = 0$)

$\Downarrow$

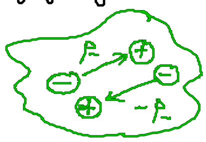
es ex. orthogonale Koord.trafo auf Diagonalform: $Q_{kl} = 0 \quad (k \neq l)$

$Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0$

$\Rightarrow$ nur 2 unabh. Komp.

$$\phi^{(2)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{2r^5}\,Q_{kl}x_k x_l = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\underline{r}\,\underline{\underline{Q}}\,\underline{r}}{2r^5} \sim \frac{1}{r^3}$$

Beispiel : 2 entgegengerichtete Dipole :



1.5 Elektrostat. Feldenergie

Kraft $\underline{F}(\underline{r}) = q\,\underline{E}(\underline{r}) = -q\,\underline{\nabla}\phi(\underline{r})$

$\Rightarrow \quad V(\underline{r}) = q\,\phi(\underline{r})$ ist pot. Energie einer Ladung q im Feld $\underline{E}(\underline{r})$

$W_{ij} = q_i \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|} = W_{ji}$ pot. Energie der Ladung q_i bei $\underline{r}_i$ im Pot. der Ladung q_j bei $\underline{r}_j$

gesamte pot. Energie eines Systems von Ladungen $q_1 \cdots q_N$:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} W_{ij} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|}$$

Kontinuierliche Ladungsverteilung $\varrho(\underline{r})$

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \, \frac{\varrho(\underline{r})\,\varrho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \int d^3r \; \phi(\underline{r})\,\varrho(\underline{r})}$$

$$\varrho(\underline{r}) = \epsilon_0 \underline{\nabla}\cdot\underline{E} \Longrightarrow W = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r\; \phi(\underline{r})\, \underline{\nabla}\cdot\underline{E}$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2}\left[\int d^3r\; \underline{\nabla}(\phi\underline{E}) - \int d^3r\,(\underline{\nabla}\phi)\,\underline{E}(\underline{r}) \right]$$

$$\overset{\text{gauß}}{=} \frac{\epsilon_0}{2}\left[\underbrace{\int_{S_\infty} d\underline{f}\,(\underset{\sim r^{-1}}{\phi}\,\underset{\sim r^{-2}}{\underline{E}})}_{0}{}_{\,r\to\infty} + \int d^3r\; \underline{E}(\underline{r})\cdot\underline{E}(\underline{r}) \right]$$

$$= \int d^3r\; w(\underline{r})$$

Energiedichte des el. Feldes $\boxed{w(\underline{r}) = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\underline{E}(\underline{r})\right)^2}$

Selbstenergie einer Pkt. ladung

$$|\underline{E}(\underline{r})| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\ , \quad w(r) = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{1}{r^4}$$

Gesamtenergie $W = \int d^3r\, w(\underline{r}) = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 4\pi \underbrace{\int_0^\infty dr\, r^2 \frac{1}{r^4}}_{\frac{1}{r}(r=0) \to \infty}$

Begriff der Punktladung ist im Widerspruch zum feldtheoret. Begriff der Energiedichte !