English Summary:

Matter in electric and magnetic fields

Polarization $\underline{P}(\underline{r},t) = -\epsilon_0 \underline{E}_p(\underline{r},t)$, $\boxed{\underline{\nabla}\cdot\underline{P} = -\rho_p}$ polarization charge density

polarization field E_p generated by permanent or induced el. dipoles

Dielectric displacement $\boxed{\underline{D}(\underline{r},t) = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}}$, $\boxed{\underline{\nabla}\cdot\underline{D} = \rho}$ free charge density

Polarization $\equiv$ macroscopic electric dipole density

$$\underline{P}(\underline{r},t) = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} d^3s\; \underline{P}_m(\underline{r}+\underline{s},t), \quad \underline{P}_m(\underline{r},t) = \sum_i \underline{p}_i\,\delta(\underline{r}-\underline{r}_i)$$

microscopic el. dipole density

5.2 Magnetisierung

Mikroskop. Ursache für den Magnetismus der Materie sind mikroskop. magnet. Dipolmomente $\underline{m}$:

(a) Für $\underline{B} = 0$ vorhandene perm. magn. Momente $\underline{m}$ werden zur Minimierung der pot. Energie $W_{magn} = -\underline{m}\cdot\underline{B}$ vorzugsweise (gegen die therm. Bewegung) $\uparrow\uparrow \underline{B}$ orientiert (z.B. Bahn- u. Spinmomente von Elektronen)
$\rightarrow$ paramagn. Verhalten

(b) Durch $\underline{B}$ können nach dem Faraday'schen Induktionsgesetz Kreisströme induziert werden.
Lenz'sche Regel $\Rightarrow$ Magnetisierung $\downarrow\uparrow \underline{B}$
$\rightarrow$ diamagn. Verhalten

makroskop. gemittelte Felder

mikroskop. magn. Dipoldichte $\underline{M}_m(\underline{r},t) = \sum_i \underline{m}_i(t)\,\delta(\underline{r}-\underline{r}_i)$

Mittelung über kleines makroskop. Vol. ΔV:

$$\underline{M}(\underline{r},t) = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} d^3s\; \underline{M}_m(\underline{r}+\underline{s},t)$$

Magnetisierung = makroskop. magn. Dipoldichte

Ziel: Zus.hang zwischen $\underline{M}$ und den effektiven Feldern $\underline{B}$ in der Materie

zeige, dass eine Magnetisierungsstromdichte $\underline{j}_M$ als Ursache der Felder eingeführt werden kann.

$$\underline{\nabla} \times \underline{B}_M = \mu_0 \underline{j}_M \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\underline{\nabla} \times \underline{M} = \underline{j}_M}$$

eff. Gesamtinduktion (stat. Fall)

$$\underline{B}' = \underline{B} + \underline{B}_M \implies \underline{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0}\underline{B}'\right) = \underbrace{\underline{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0}\underline{B}\right)}_{\underline{j}} + \underline{j}_M$$

Erzeugung durch freie Ströme:

$$\boxed{\underline{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0}\underline{B}' - \underline{M}\right) = \underline{j}}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu_0}\left(\underline{B}' - \underline{B}_M\right) = \frac{\underline{B}}{\mu_0}$$

Betrachte Vektorpot. der mikroskop. el. u. magn. Dipole (§4.3)

$$A_m(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_i \left\{ \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}_i|} \underbrace{\dot{\underline{p}}_i\left(t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}_i|}{c}\right)}_{\text{el. Dipolmoment}} + \underline{\nabla} \times \left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}_i|} \underbrace{\underline{m}_i\left(t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}_i|}{c}\right)}_{\text{magn. Dipolmoment}} \right) \right\}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \left\{ \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \underbrace{\dot{\underline{P}}_m\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}_{\text{mikr. el. Dipoldichte}} + \underline{\nabla}_r \times \left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \underbrace{\underline{M}_m\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}_{\text{magn. Dipoldichte}} \right) \right\}$$

makroskop. gemitteltes Pot.:

$$\underline{A}(\underline{r},t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3s \; \underline{A}_m(\underline{r}+\underline{s}, t)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \left\{ \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\, \dot{\underline{P}}\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right) + \underline{\nabla}_r \times \left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\, \underline{M}\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)\right)\right\}$$

makroskop. Dipoldichten

Umformung

$$\int d^3r' \, \underline{\nabla}_r \times \left\{ \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\, \underline{M}\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)\right\} = \underbrace{-\int d^3r' \, \underline{\nabla}_{r'} \times \{\ldots\}}_{0 \text{ (Gauß)}}$$

$$+ \int d^3r' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \left[\underline{\nabla}_{r'} \times \underline{M}(\underline{r}', t') \right]_{t' = t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c} =: t^{ret}}$$

Def.: Magnetisierungsstromdichte $\boxed{\underline{j}_M := \nabla \times \underline{M}}$

Polarisationsstromdichte $\boxed{\underline{j}_P := \frac{\partial}{\partial t} \underline{P}}$

$$\underline{A}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \left\{ \underline{j}_P(\underline{r}', t^{ret}) + \underline{j}_M(\underline{r}', t^{ret}) \right\}$$

erzeugt durch Polarisations- u. Magnetisierungsstromdichte

Erhaltungssatz:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_P = -\underline{\nabla} \cdot \dot{\underline{P}} = -\nabla \underline{j}_P$$

$$\boxed{\dot{\rho}_P + \operatorname{div} \underline{j}_P = 0}$$ Erhaltung der Polarisationsladung

5.3 Maxwell-Gleichungen in Materie

Vollständige Pot. enthalten

- freie Ladungs- u. Stromdichten ρ, $\underline{j}$
- Polarisations- u. Magnetisierungsbeiträge ρ_P, $\underline{j}_P$, $\underline{j}_M$

$$\underline{A}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \left\{ \underline{j}(\underline{r}', t^{ret}) + \underline{j}_P(\underline{r}', t^{ret}) + \underline{j}_M(\underline{r}', t^{ret}) \right\}$$

$$\phi(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\{\varrho(\underline{r}',t^{ret}) + \varrho_p(\underline{r}',t^{ret})\}$$

$\underline{A}$, ϕ sind also Lösungen der inhom. Wellengln.

$$\left.\begin{aligned} \Box\underline{A}(\underline{r},t) &= -\mu_0(\underline{j}+\underline{j}_p+\underline{j}_M) \\ \Box\phi(\underline{r},t) &= -\frac{1}{\epsilon_0}(\varrho+\varrho_p) \end{aligned}\right\} \text{Lorenz-Eichung}$$

Für die Felder $\underline{E}$, $\underline{B}$ in Materie folgt

$$\underline{E} := -\frac{\partial}{\partial t}\underline{A} - \underline{\nabla}\phi$$

$$\underline{B} := \underline{\nabla}\times\underline{A}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} &(1) \quad \underline{\nabla}\times\underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\underline{B} \\ &(2) \quad \underline{\nabla}\cdot\underline{B} = 0 \end{aligned}\right\} \text{wie im Vakuum}$$

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\underline{\nabla}\cdot\underline{A}}_{-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi \text{ (Lorenz-Eichung)}} - \underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla}\phi = -\Box\phi$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0}(\varrho+\varrho_p)$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0}(\varrho - \underline{\nabla}\cdot\underline{P})$$

$$(3) \quad \underline{\nabla}\cdot\underbrace{(\epsilon_0\underline{E}(\underline{r},t) + \underline{P}(\underline{r},t))}_{\underline{D}(\underline{r},t) \text{ diel. Verschiebung}} = \varrho(\underline{r},t)$$

$$\underline{\nabla}\times\underline{B} = \underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{A}) = \underline{\nabla}\underbrace{(\underline{\nabla}\cdot\underline{A})}_{-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi \text{ (Lorenz)}} - \Delta\underline{A}$$

$$= -\Delta\underline{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\underline{\nabla}\phi}_{-\underline{E}-\frac{\partial}{\partial t}\underline{A}}$$

$$= -\Box\underline{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\underline{E}$$

$$= \mu_0(\underline{j} + \underbrace{\underline{j}_p}_{=\dot{\underline{P}}} + \underbrace{\underline{j}_M}_{=\underline{\nabla}\times\underline{M}}) + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\underline{E}$$

$$\underline{\nabla}\times\underline{B} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{(\varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P})}_{\underline{D}} + \mu_0 \underline{\nabla}\times\underline{M} + \mu_0 \underline{j}$$

$$\Rightarrow (4) \quad \underline{\nabla}\times\underbrace{\left(\frac{1}{\mu_0}\underline{B} - \underline{M}\right)}_{\underline{H}(\underline{r},t)} = \underline{j} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{D}$$

$\underline{H}(\underline{r},t)$ <u>Magnetfeld</u> (nur durch die <u>freien</u> Ströme erzeugt)

<u>Zusammenfassung der Maxwellgln.:</u>

$$\boxed{\begin{array}{lll}
(1) & \underline{\nabla}\times\underline{E} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{B} & = 0 \\
(2) & \underline{\nabla}\cdot\underline{B} & = 0 \\
(3) & \underline{\nabla}\cdot\underline{D} & = \varrho \\
(4) & \underline{\nabla}\times\underline{H} - \frac{\partial}{\partial t}\underline{D} & = \underline{j} \\
\hline
(5) & \underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P} & \\
(6) & \underline{H} = \frac{1}{\mu_0}\underline{B} - \underline{M} &
\end{array}}$$

(1), (2): WW der Felder mit Probeladungen

(3), (4): Erzeugung der Felder durch <u>freie</u> Ladungen u. Ströme