English Summary:

Dipole radiation: $\boxed{r \gg a}$ extension of source

$\boxed{\lambda \gg a}$ neglect relative retardation inside source

$$\boxed{\underline{A}^{(1)}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\,\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}$$ el. dipole moment $\underline{p} = \int d^3r'\,\underline{r}'\,\varrho\left(\underline{r}', t-\frac{r}{c}\right)$

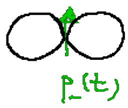
Hertz dipole $\underline{p}(t) = \underline{p}_0\, e^{-i\omega t}$:

$$\underline{A}^{(1)}(\underline{r},t) = \frac{-i\omega\mu_0\underline{p}_0}{4\pi}\,\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$$

$\boxed{kr \gg 1}$ far field $\quad \phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c r^2}\,\underline{r}\cdot\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)$

$\boxed{kr \ll 1}$ near field $\quad \phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^3}\,\underline{r}\cdot\underline{p}(t)$

Poynting vector (energy flux density) $\quad \boxed{\underline{S} = \frac{\mu}{(4\pi)^2 c}\,|\ddot{\underline{p}}|^2\,\frac{1}{r^2}\sin^2\vartheta\,\frac{\underline{r}}{r}}$



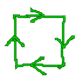
Magn. Dipol-, el. Quadrupolstrahlung

Die niedrigste Ordnung der Multipolentw. von $\underline{A}(\underline{r},t)$ verschwindet für quellenfreie Stromdichte $\underline{j}(\underline{r}',\tau)$:

$$\nabla_{r'}\,\underline{j}(\underline{r}',\tau) = -\frac{\partial}{\partial\tau}\varrho(\underline{r}',\tau) = 0 \quad\Rightarrow \dot{\underline{p}}(\tau) = \int d^3r'\,\underline{r}'\dot{\varrho} = 0$$

$$\Rightarrow\ \underline{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\,\dot{\underline{p}}(\tau) \equiv 0$$ in el. Dipolnäherung keine Abstrahlung!

Beispiel: geschlossene Leiterschleife (Rahmenantenne)



$I(t) = I_0\, e^{-i\omega t}$

2. Ordnung

$$\underline{A}^{(2)}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int d^3r'\,(\underline{r}\cdot\underline{r}')\left(1+\frac{r}{c}\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\underline{j}(\underline{r}',\tau)$$

Mit $\quad (\underline{r}\cdot\underline{r}')\,\underline{j}(\underline{r}',\tau) = \frac{1}{2}(\underline{r}'\times\underline{j})\times\underline{r} + \frac{1}{2}\left[(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underline{j} + (\underline{r}\cdot\underline{j})\underline{r}'\right]$

und $\underline{\nabla}_{r'}\cdot\{x_k'(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underline{j}\} = [(\underline{r}\cdot\underline{r}')j_k + x_k'(\underline{r}\cdot\underline{j}')] + x_k'(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underbrace{\underline{\nabla}\cdot\underline{j}}_{-\frac{\partial}{\partial\tau}\rho(\underline{r}',\tau)}$

bzw. integriert

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \,\underline{\nabla}_{r'}\{\underline{r}'\otimes(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underline{j}\}}_{0 \ \text{(Gauß)}} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\,[(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underline{j} + (\underline{r}\cdot\underline{j})\underline{r}'] - \int d^3r'(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underline{r}'\dot{\rho}$$

folgt

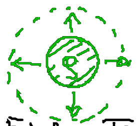
$$\int d^3r'(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underline{j}(\underline{r}',\tau) = \underbrace{\left[\frac{1}{2}\int d^3r'[\underline{r}'\times\underline{j}(\underline{r}',\tau)]\right]}_{\underline{m}(\tau)\ \text{magn. Dipolmoment}}\times\underline{r} + \frac{1}{2}\int d^3r'(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underline{r}'\dot{\rho}$$

El. Quadrupolmoment-Tensor:

$$\underline{\underline{Q}}(\tau) = \int d^3r'\rho(\underline{r}',\tau)(3\underline{r}'\otimes\underline{r}' - r'^2\underline{\underline{1}}) =: \underline{\underline{\tilde{Q}}} - \underbrace{\frac{1}{3}(\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{\tilde{Q}}})\underline{\underline{1}}}$$

falls $\tilde{Q}(\tau)$ osz.: „breathing mode"

$\Rightarrow$ kein Beitrag zu $\underline{E}$, $\underline{B}$



(verschwindet durch Eich-Trafo!)

$$\Rightarrow \underline{\underline{Q}}\cdot\underline{r} = 3\int d^3r'\rho(\underline{r}',\tau)\underline{r}'(\underline{r}'\cdot\underline{r})$$

$$\Rightarrow A^{(2)}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(1+\frac{r}{c}\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left[\underline{m}(\tau)\times\underline{r} + \frac{1}{6}\dot{\underline{\underline{Q}}}(\tau)\underline{r}\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\underbrace{\frac{1}{r^3}\underline{m}\times\underline{r} + \frac{1}{cr^2}\dot{\underline{m}}\times\underline{r}}_{\text{magn. Dipol-Strahlung}} + \underbrace{\frac{1}{6r^3}\dot{\underline{\underline{Q}}}\underline{r} + \frac{1}{6cr^2}\ddot{\underline{\underline{Q}}}\underline{r}}_{\text{el. Quadrupol-strahlung}}\right\}$$

$$\boxed{A_m^{(2)}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\underline{\nabla}\times\frac{1}{r}\underline{m}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]}$$ magn. Dipolstrahl.

skalares Pot. aus Lorenz-Eichung:

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\underline{r},t) = -c^2\,\underline{\nabla}\cdot\underline{A}(\underline{r},t) = -\frac{\mu_0 c^2}{4\pi}\,\underline{\nabla}\cdot\left(\underline{\nabla}\times\frac{1}{r}\underline{m}\right) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \phi(\underline{r},t) = \phi(\underline{r}) \overset{!}{=} 0 \quad \text{oBdA}$$

Felder in Fernfeldnäherung:

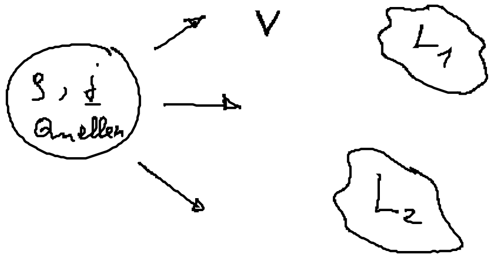
$$\underline{B}_m(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi c^2 r^3}\left[\underline{\ddot{m}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\underline{r}\right]\times\underline{r} \qquad (r \gg \lambda \gg a)$$

$$\underline{B}_{el.Q}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi^2 c^2 r^3}\left[\frac{1}{6}\,\underline{\underline{\dddot{Q}}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\cdot\underline{r}\right]\times\underline{r} \qquad (\quad " \quad)$$

$$\underline{E} = c\left(\underline{B}\times\frac{\underline{r}}{r}\right) \qquad \text{wie für el. Dipolstrahlung}$$

4.4 Wellenoptik und Beugung

Problem: Ausbreitung elektromagn. Wellen bei geg. lokalisierten Quellen $\rho(\underline{r},t)$ und $\underline{j}(\underline{r},t)$ und vorgegebenen Leitern L_α im Vakuum.



Ziel: Berechnung des Wellenfeldes im Außenraum V

Anwendung: Radiowellen ($\lambda \sim 1 - 10^4$ m)
Radar
Optik ($\lambda \sim 400-800$ nm) $\rightarrow$ Beugung

Zurückführung auf Randwertaufgabe

Lösung der inhomogenen Wellengln.

$$\left.\begin{aligned} \Box \phi &= -\frac{1}{\epsilon_0}\rho \\ \Box \underline{A} &= -\mu_0 \underline{j} \end{aligned}\right\} \text{ Lorenzeichung}$$

zu vorgeg. $\rho(\underline{r},t)$ und $\underline{j}(\underline{r},t)$ und Randbed. auf L_α sowie Kausalitätsbed. (Ausstrahl. bed.)

Annahme: $$\left.\begin{aligned} \rho(\underline{r},t) &= \rho(\underline{r})e^{-i\omega t} \\ \underline{j}(\underline{r},t) &= \underline{j}(\underline{r})e^{-i\omega t} \end{aligned}\right\} \text{ oBdA wegen Fourierzerlegung}$$

(period. Erregung)

$$\Rightarrow \quad \phi(\underline{r},t) = \phi(\underline{r})e^{-i\omega t}$$

$$\underline{A}(\underline{r},t) = \underline{A}(\underline{r})e^{-i\omega t}$$

eingesetzt in die Wellengl. $\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$

$$\boxed{\left(\Delta + k^2\right)\phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\underline{r})} \quad \text{mit } k := \frac{\omega}{c}$$

Green'sche Fkt. der Wellengl. (§4.2) $\Box\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$:

$$\Box G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = -\delta(\underline{r}-\underline{r}')\delta(t-t')$$

allg. Lös. $$\phi(\underline{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{-\infty}^{t} dt'\, G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')\rho(\underline{r}',t')/\epsilon_0$$

$$= \int_{\mathbb{R}} d^3r' \underbrace{\int_{-\infty}^{t} dt'\, G(\underline{r}-\underline{r}', \underbrace{t-t'}_{\tau})e^{-i\omega t'}}_{\underbrace{\left(\int_0^\infty d\tau\, G(\underline{r}-\underline{r}',\tau)e^{i\omega\tau}\right)}_{=:\, \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')} e^{-i\omega t}} \rho(\underline{r}')/\epsilon_0$$

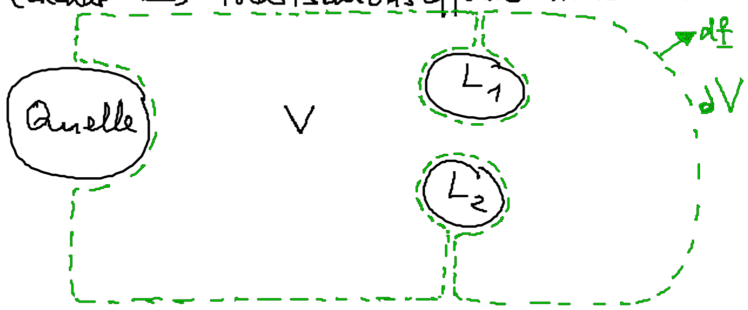
period. Zeitabhängigkeit abseparieren:

$$\boxed{\begin{aligned}\phi(\underline{r}) &= \int d^3r'\, \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')\, \rho(\underline{r}')/\epsilon_0 \\ \text{mit } (\Delta + k^2)\,\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') &= -\delta(\underline{r}-\underline{r}')\end{aligned}}$$

Problem: Randbedingungen für ϕ, $\underline{A}$ sind im nichtstat. Fall nicht bekannt, sondern müssen selbstkonsistent bestimmt werden.

Skalare Kirchhoff-Identität

(skalar $\longrightarrow$ Polarisationseffekte nicht beschreibbar)



Green'scher Satz: $\int_{\partial V} d\underline{f}\,(\varphi \underline{\nabla}\psi - \psi \underline{\nabla}\varphi) = \int_V d^3r\,(\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)$

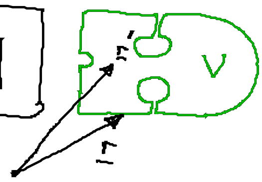
Setze $\psi(\underline{r}) = \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')$, $\varphi(\underline{r}) = \phi(\underline{r})$ sei Lösung:

$$\Rightarrow \int_{\partial V} d\underline{f}\,(\phi \underline{\nabla}_r \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') - \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')\underline{\nabla}_r \phi) = \underbrace{\int_V d^3r\,(\phi \underbrace{\Delta\tilde{G}}_{-\delta(\underline{r}-\underline{r}')-k^2\tilde{G}} - \tilde{G}\underbrace{\Delta\phi}_{-\frac{\rho}{\epsilon_0}-k^2\phi})}_{-\phi(\underline{r}')}$$

$\overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(\underline{r}') = \int_{\partial V} d\underline{f}\left[\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')\underline{\nabla}_r\phi(\underline{r}) - \phi(\underline{r})\underline{\nabla}_r\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')\right]}$$

$\underline{r}' \in V$



Pot. $\phi(\underline{r}')$ im Inneren von V ist durch ϕ und $\underline{\nabla}\phi$ auf dem Rand festgelegt, falls die Greenfkt. $\tilde{G}$ bekannt ist.