English Summary:

Four-vectors and Minkowski space

contravariant components $x^0 = ct$, x^i = Cartesien comp. of $\underline{r}$ $(i=1,2,3)$

covariant components $x_0 = x^0$, $x_i = -x^i$

$$\boxed{(ds)^2 = dx^\mu g_{\mu\nu} dx^\nu = dx^\mu dx_\mu = dx_\mu dx^\mu}$$ scalar product (Lorentz invariant)

metric tensor $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

time-like 4-vectors: $x^\mu x_\mu > 0$

space-like 4-vectors: $x^\mu x_\mu < 0$

Lorentz transform:

$$\boxed{x'^\mu = U^\mu{}_\nu x^\nu} \qquad U^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (U^{-1})_\nu{}^\mu = U^T$$

$$x'_\mu = U_\mu{}^\nu x_\nu$$

$$U^{-1}(\beta) = U(-\beta)$$

6.3 Relativistische Mechanik

Newton'sche Mechanik ist nicht Lorentz-invariant.

Jetzt: Lorentz-invariante Formulierung mit Hilfe von Vierervektoren u. Skalaren (= Invarianten).

Grenzfall $v \ll c$ soll klass. Mechanik ergeben.

Nichtrelativist. Bahn $\underline{r} = \underline{r}(t)$

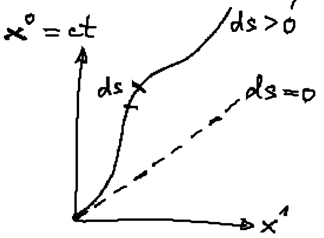
Vierervektoren $x^\mu(t)$: Parametrisierung der Weltlinie (ct, x, y, z) durch t ungeeignet, da sich t bei Lorentz-Trafo ändert.

Def.: Eigenzeit τ = Zeit im momentanes Ruhesystem (vom Teilchen mitgeführte Uhr)

$$\Rightarrow x^\mu(\tau)$$

Bogenlänge der Weltlinie:

$$ds = (dx^\mu dx_\mu)^{1/2} = (c^2 dt^2 - (d\underline{r})^2)^{1/2}$$



$$= c\left[1 - \left(\frac{1}{c}\frac{d\underline{r}}{dt}\right)^2\right]^{1/2} dt$$

$$= c\,(1-\beta^2)^{1/2}\,dt \qquad \beta = \frac{v}{c} = \frac{1}{c}\left|\frac{d\underline{r}}{dt}\right|$$

$$= c\,\frac{dt}{\gamma} \qquad \text{Lorentz-Trafo für } dx = 0$$

$$= c\,d\tau \qquad d\tau = dt' = \frac{dt}{\gamma} \text{ (momentanes Ruhesystem)}$$

$$\boxed{\tau = \frac{s}{c}}$$

Def.: Vierergeschwindigkeit $\boxed{u^\mu := \frac{dx^\mu}{ds}} = \frac{1}{c}\frac{dx^\mu}{d\tau}$

dimensionslos!

$$u^\mu u_\mu = \frac{dx^\mu dx_\mu}{(ds)^2} = \frac{(ds)^2}{(ds)^2} = 1$$

Lorentz-invariant, Einheitsvektor (ds Skalar)

Komponenten $u^\mu = \frac{\gamma}{c}\frac{dx^\mu}{dt}$:

$$\boxed{\begin{aligned} u^0 &= \gamma \\ u^i &= \frac{\gamma}{c} v^i = \frac{1}{c}\frac{dx^i}{d\tau} \end{aligned}} \quad i=1,2,3 \qquad \left.\begin{aligned} &\to 1 \\ &\to \frac{1}{c} v^i \end{aligned}\right\}$$

nichtrelativist. Grenzfall $\beta \ll 1$:
v^i Teilchengeschw.

Def.: Viererimpuls $\boxed{p^\mu := m_0 c\, u^\mu} = m_0 \frac{dx^\mu}{d\tau}$

mit Ruhemasse m_0

$$p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2 \underbrace{u^\mu u_\mu}_{1} = m_0^2 c^2 \qquad \text{Lorentz-invariant}$$

$$\boxed{\begin{aligned} p^0 &= \frac{m_0 c}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = m(v)c = p_0 \\ p^i &= \frac{m_0 v^i}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = m(v)\,v^i = -p_i \end{aligned}} \quad \xrightarrow{\beta \ll 1} m_0 v^i \text{ (nichtrelativist. Impuls)}$$

mit geschwindigkeitsabh. Masse $\boxed{m(v) := \frac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}}$

Es gilt

(*) $$\boxed{\frac{p^i}{p^0} = \frac{u^i}{u^0} = \frac{\frac{\gamma}{c}v^i}{\gamma} = \frac{v^i}{c}}$$

Zus.hang Viererimpuls – Vierergeschw. – Teilchengeschw.

Physikal. Bedeutung von p^0

Verallg. des Newton'schen Grundgesetzes

$$\underline{F} = \frac{d}{dt}\underline{p} \qquad \text{(nicht Lorentz-invariant!)}$$

auf relativist. invariante Form:

Def.: Viererkraft (Minkowski-Kraft)

$$\boxed{f^\mu := \frac{d}{d\tau}p^\mu} = m_0 c \frac{du^\mu}{d\tau} = m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$$

Leistungsbilanz

$$u^\mu u_\mu = 1 \Rightarrow \frac{d}{d\tau}(u^\mu u_\mu) = 2\frac{du^\mu}{d\tau}u_\mu = 0$$

$$\Rightarrow f^\mu u_\mu \overset{!}{=} 0 \quad ⊛$$

$$\Rightarrow \gamma\frac{d}{d\tau}p^0 + \frac{\gamma}{c}\sum_{i=1}^{3} f^i v_i = \frac{\gamma}{c}\Big[\frac{d}{d\tau}\underbrace{(cp^0)}_{E} - \underbrace{\underline{f}\cdot\underline{v}}\Big] \overset{⊛}{=} 0$$

Änderung der Energie E $\overset{!}{=}$ Leistung

Def.: relativist. Energie

$$\boxed{E := cp^0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = m(v)c^2} \quad \text{Energie}$$

somit $\boxed{p^0 = \frac{E}{c}}$ → Energie

und $f^0 = \frac{1}{c}\underline{f}\cdot\underline{v}$ Leistung mit $\underline{f} = (f^1, f^2, f^3)$

Relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \underline{p}^2 = (m_0 c)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 \underline{p}^2} \iff E = \sqrt{c^2 \underline{p}^2 + (m_0 c^2)^2}$$

nichtrelativist. Grenzfall $|\underline{p}| \ll m_0 c$

$$E = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{\underline{p}^2}{m_0^2 c^2}} \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{\underline{p}^2}{2 m_0^2 c^2} + \dots\right)$$

$$\approx m_0 c^2 + \frac{\underline{p}^2}{2 m_0} + \dots$$

Ruhe-energie   kinet. Energie

$\underline{p} = 0$: $E = m_0 c^2$

Äquivalenz v. Ruhemasse und Energie

(Anwendung: Zerfall ruhender Elementarteilchen in Zerfallsprodukte mit kinet. Energie,

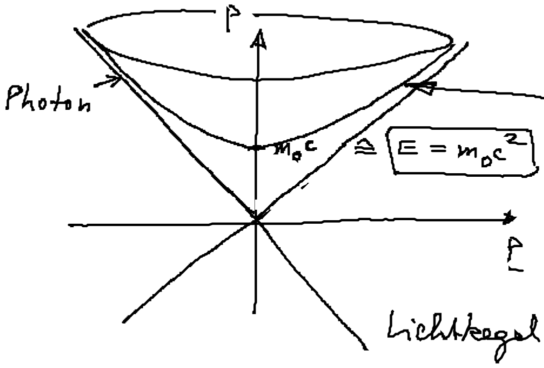
z.B. $\pi^+ \to \mu^+ + \nu + E_{kin}^\nu$ (ca. 25% der π^+-Ruheenergie))

hochrelativist. Grenzfall : $m_0 = 0$ (z.B. Photon)

$E = c|\underline{p}|$ $\qquad p^\mu = (|\underline{p}|, \underline{p})$ $\qquad$ mit $p^\mu p_\mu = 0$

(lichtartiger Vektor)

$v = c \quad \Rightarrow u^\mu$ nicht mehr definiert, da $\gamma \to \infty$

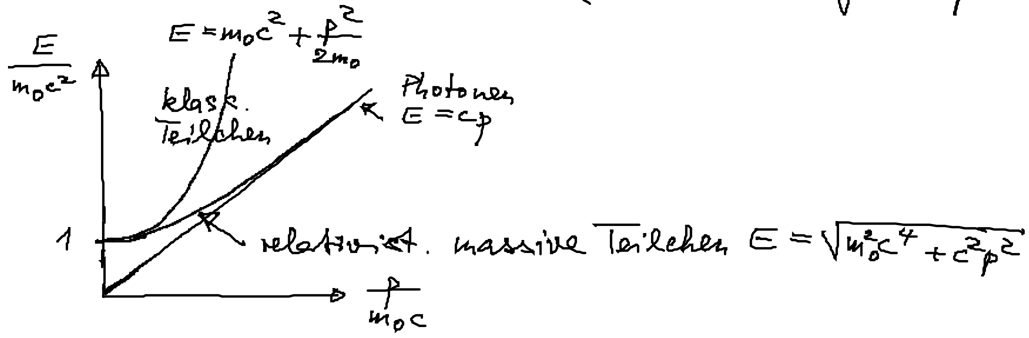


massive Teilchen

p^μ liegt auf der „Massenschale" (on shell)

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \underline{p}^2 = (m_0 c)^2$$

Hyperboloid
(relativist. Energie-Impuls-Bez.)



Bem.: Welle-Teilchen-Dualismus der Quantentheorie

Photon: $\boxed{E = cp}$

Lichtwelle (Vakuum): $\boxed{\omega = ck}$

DeBroglie-Beziehung
$$E = \hbar \omega$$
$$p = \hbar k$$

ω Kreisfrequenz
k Wellenzahl

$\hbar$ Planck'sches Wirkungsquantum