English Summary:

Electric multipoles

monopole $(\ell=0)$: $\phi^{(0)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_0}{r}$ $\qquad Q_0 = \int d^3r'\, \rho(\underline{r}')$ total charge

dipole $(\ell=1)$: $\phi^{(1)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\underline{p}\cdot\underline{r}}{r^3}$ $\qquad \underline{p} = \int d^3r'\, \rho(\underline{r}')\,\underline{r}'$ el. dipole moment

quadrupole $(\ell=2)$: $\phi^{(2)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\underline{r}\,\underline{\underline{Q}}\,\underline{r}}{2r^5}$ $\qquad Q_{k\ell} = \int d^3r'\, \rho(\underline{r}')\,(3x_k' x_\ell' - r'^2\delta_{k\ell})$

tensor of el. quadrupole moment

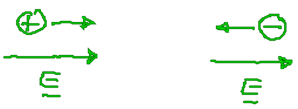
el. stat. field energy

field energy density $w(r) = \frac{\epsilon_0}{2}\,\underline{E}(\underline{r})\cdot\underline{E}(\underline{r})$ $\qquad W = \int d^3r\, w(\underline{r})$

1.6 Leiter in der Elektrostatik

Elektrische Leiter = Materie mit quasi-frei beweglichen elektr. Ladungen

El. Feld $\underline{E}(\underline{r})$ im Innern eines Leiters $\to$ Kraft $\underline{F} = q\underline{E}$

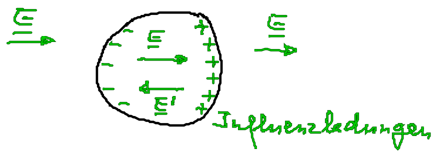


Ladungen werden verschoben

$\Rightarrow$ kompensierendes Gegenfeld $\underline{E}'$, bis $\underline{F}=0$, d.h. $\underline{E}' - \underline{E} = 0$

Anfang

Endsit.

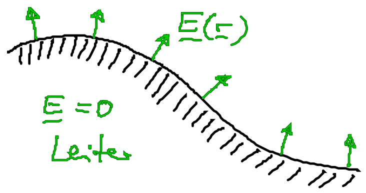


$\Rightarrow \underline{E}^{\text{res}}(\underline{r}) = 0$ im Innern des Leiters

$\underline{E}^{\text{res}}(\underline{r}) = -\underline{\nabla}\phi(\underline{r}) = 0 \quad \Rightarrow \phi(\underline{r}) = \text{const.}$ im Innern

$\Rightarrow$ Leiteroberfläche ist Äquipotentialfläche

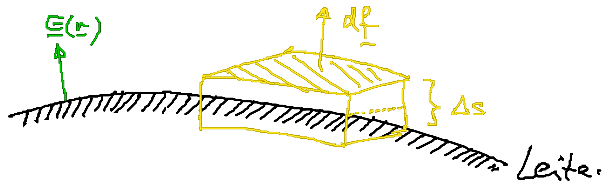
Vakuum



$\underline{E}(\underline{r}) \perp \phi(\underline{r}) = \text{const}$
(Leiteroberfläche)

$\underline{E} = 0 \Rightarrow \rho(\underline{r}) = 0$

<u>Flächenladungsdichte</u> auf Leiteroberflächen:



$$\epsilon_0 \oint_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \int_V d^3r\, \rho(\underline{r})$$

$V = df\, \Delta s$ mit $df \to 0$, $\Delta s \to 0$

$$\oint_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{E}(\underline{r}) \longrightarrow df\, \underbrace{\underline{n} \cdot \underline{E}}_{E} \qquad (\underline{n} \parallel \underline{E})$$

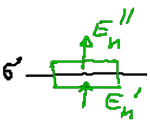
$\underline{n}$ Normalenvektor

$$\int_V d^3r\, \rho(\underline{r}) \longrightarrow df\, \underbrace{\rho(\underline{r}) \Delta s}_{\sigma(\underline{r})}$$

$\sigma(\underline{r})$ <u>Flächenladungsdichte</u>

$$\Rightarrow \boxed{\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\underline{r})\, \underline{n}} \quad \text{auf Leiteroberfläche}$$

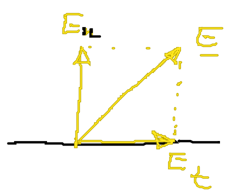
Allg. gilt für Flächenladungen σ



$$\underbrace{E_n'' - E_n'}_{\text{„Flächendivergenz"}} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\underline{r})$$

vgl. $\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\underline{r})$
Volumendivergenz

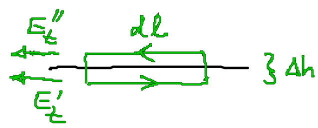
= Sprung der Normalkomp. von $\underline{E}$ beim Durchgang durch geladene Flächen



<u>Tangenzialkomp.</u> von $\underline{E}$ ist stetig beim Durchgang durch geladene Flächen

<u>Beweis</u>:

$$\oint_{\partial F} \underline{E} \cdot d\underline{s} = \int_F \underline{\nabla} \times \underline{E} \cdot d\underline{f} = 0$$



$F = dl\,\Delta h \quad$ mit $\quad dl \to 0\,, \quad \Delta h \to 0$

$$\left(E_t'' - E_t'\right) dl = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} E_t'' - E_t' &= 0 \\ E_n'' - E_n' &= \frac{1}{\epsilon_0}\sigma(\underline{r}) \end{aligned}}$$

Randwertaufgabe der Elektrostatik mit Leitern

1. Grundaufgabe:

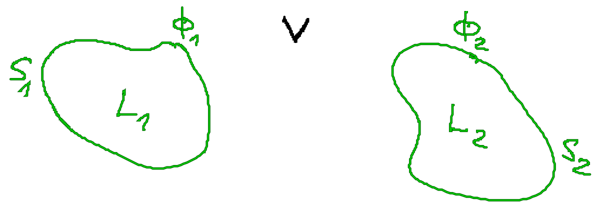
geg.: Leiter L_α (Oberflächen S_α) , $\alpha = 1, \dots, n$
mit Pot. ϕ_α ;
Raumladungsdichte $\rho(\underline{r})$ im Außenraum V

gesucht: $\phi(\underline{r})$ als Lösung von $\Delta\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\underline{r})$
zu den Randbed.

$$\phi(\underline{r})\Big|_{S_\alpha} = \phi_\alpha$$

$$\phi(\underline{r}) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

sowie Gesamtladungen Q_α auf den Leitern
(Dirichlet'sches Randwertproblem)



Lösung :

$$(*) \quad \boxed{\phi(\underline{r}) = \int_V d^3r'\, G(\underline{r}-\underline{r}')\rho(\underline{r}') + \epsilon_0 \sum_{\alpha=1}^{n} \phi_\alpha \int_{S_\alpha} d\underline{f}' \cdot \underline{\nabla}_{r'} G(\underline{r}-\underline{r}')}$$

wobei die Green'sche Fkt. $G(\underline{r}-\underline{r}')$ die Lösung von $\Delta_r G(\underline{r}-\underline{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')$ zu den Randbed.

$$G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\substack{\underline{r}\in S_\alpha \\ \underline{r}'\in V}} = 0\,, \qquad G(\underline{r}-\underline{r}') \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

ist .

__Beweis__:

Aus dem Gauß'schen Satz

$$\oint_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{v} = \int_V d^3r \,\mathrm{div}\,\underline{v}$$

folgt mit $\underline{v} = \psi\underline{\nabla}\varphi$

$$\int_{\partial V} d\underline{f}\,\psi\underline{\nabla}\varphi = \int_V d^3r\,(\psi\Delta\varphi + \underline{\nabla}\psi\,\underline{\nabla}\varphi)$$

bzw. mit $\underline{v} = \varphi\underline{\nabla}\psi$

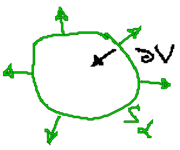
$$\int_{\partial V} d\underline{f}\,\varphi\underline{\nabla}\psi = \int_V d^3r\,(\varphi\Delta\psi + \underline{\nabla}\psi\,\underline{\nabla}\varphi)$$

$\Rightarrow$ __Green'scher Satz__:

$$\int_{\partial V} d\underline{f}\,(\varphi\underline{\nabla}\psi - \psi\underline{\nabla}\varphi) = \int_V d^3r\,(\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)$$

Setze $\psi(\underline{r}) := G(\underline{r}-\underline{r}')$, $\varphi(\underline{r}) := \phi(\underline{r})$ $\qquad \partial V = \bigcup_{\alpha=1}^{n} S_\alpha$

(i) zeige: $\Delta\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\underline{r}) \Rightarrow \phi(\underline{r}) = (*)$



$$\underbrace{\int_{\partial V} d\underline{f}\cdot\phi(\underline{r})\underline{\nabla}_r G(\underline{r}-\underline{r}')}_{\text{Vorzeichenwechsel!}\ \bigcup_{\alpha=1}^{n} S_\alpha} - \underbrace{\int_{\partial V} d\underline{f}\,G(\underline{r}-\underline{r}')\underline{\nabla}\phi}_{=0 \text{ wegen } G|_{r\in S_\alpha}=0} = -\frac{1}{\epsilon_0}\Big[\underbrace{\int_V d^3r\,\phi(\underline{r})\delta(\underline{r}-\underline{r}')}_{\phi(\underline{r}')} - \int d^3r\,G(\underline{r}-\underline{r}')\rho(\underline{r})\Big]$$

$$\Longrightarrow \phi(\underline{r}') = \int d^3r\,G(\underline{r}-\underline{r}')\rho(\underline{r}) + \epsilon_0\sum_{\alpha=1}^{n}\phi_\alpha\oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\underline{\nabla}_r G(\underline{r}-\underline{r}')$$

(ii) zeige: $\phi(\underline{r}) = (*) \Rightarrow$ $\Delta\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$ im Innern von V

$\phi|_{S_\alpha} = \phi_\alpha$ Randbed. erfüllen

$$\underbrace{\Delta_{r'}\phi(\underline{r}') = \int d^3r\,\underbrace{\Delta_{r'}G(\underline{r}-\underline{r}')}_{-\frac{1}{\epsilon}\delta(\underline{r}-\underline{r}')}\rho(\underline{r}) + \epsilon_0\sum_\alpha\phi_\alpha\oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\underline{\nabla}_r\underbrace{\Delta_{r'}G(\underline{r}-\underline{r}')}_{-\frac{1}{\epsilon_0}\underbrace{\delta(\underline{r}-\underline{r}')}_{0,\text{ da } \underline{r}\in S_\alpha,\ \underline{r}'\in V-\partial V}}}_{0}$$

$$= -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\underline{r}')$$

Lös. der <u>inhom.</u> Poissongl. zu <u>homog.</u> Randbed

Lös. der <u>homog.</u> Poissongl. zu <u>inhomog.</u> Randbed. $\phi\big|_{S_\alpha} = \phi_\alpha$

$$\phi(\underline r')\Big|_{\underline r'\in S_\beta} = \underbrace{\int_V d^3r\, G(\underline r-\underline r')\Big|_{\underline r'\in S_\beta}}_{0}\, \rho(\underline r) + \epsilon_0 \sum_\alpha \phi_\alpha \oint_{S_\alpha} d\underline f\cdot \nabla_r G(\underline r-\underline r')\Big|_{\underline r'\in S_\beta}$$

$$= -\epsilon_0 \oint_{\partial V} d\underline f\, \phi(\underline r)\, \nabla_r G(\underline r - \underline r')\Big|_{\underline r'\in S_\beta}$$

∂V S_α Vorzeichen-wechsel von $\underline n$

Green'scher Satz

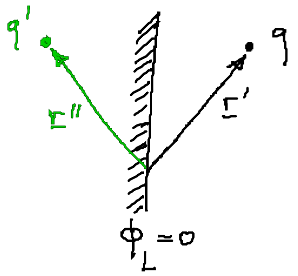
$$= -\epsilon_0\Big[\underbrace{\oint_{\partial V} d\underline f\, G(\underline r-\underline r')\Big|_{\underline r'\in S_\beta}}_{0}\, \nabla_r\phi + \int_V d^3r\,\Big(\underbrace{\phi\, \underbrace{\Delta_r G(\underline r-\underline r')}_{-\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\underline r-\underline r')}}_{-\frac{1}{\epsilon_0}\phi(\underline r')\big|_{\underline r'\in S_\beta}} - \underbrace{G(\underline r-\underline r')\Big|_{\underline r'\in S_\beta}\Delta\phi}_{0}\Big)\Big]$$

$$= \phi_\beta \qquad \square$$

<u>Ladung</u>: $Q_\alpha = \oint_{S_\alpha} df\,\sigma = \epsilon_0 \oint \underbrace{df\,\underline n}_{d\underline f}\,\underline E = -\epsilon_0\oint d\underline f\cdot\nabla\phi$

<u>Konstruktion der Green'schen Fkt.</u>
<u>für Leiteroberflächen mit hoher Symmetrie:</u>

<u>Methode der Bildladungen</u> (Spiegelladungen) Ü1



Wähle fiktive Bildladung q' bei $\underline r''$ im Leiter, so dass Pot. <u>beider</u> Ladungen auf Leiteroberfläche verschwindet:

$q' = -q$

$$G(\underline r-\underline r') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\underline r-\underline r'|} - \frac{1}{|\underline r-\underline r''|}\right)$$

Dipolpotenzial