English Summary:

Magnetostatics (stationary currents)

$$\boxed{\begin{matrix}\nabla\cdot\underline{B} = 0 \\ \Updownarrow \\ \underline{B} = \nabla\times\underline{A}\end{matrix}}$$ (no sources) $\Leftrightarrow \oint_{\partial V} \underline{B}\cdot d\underline{f} = 0$

$$\boxed{\begin{matrix}\nabla\times\underline{B} = \mu_0\underline{j} \\ \Updownarrow \\ \oint_{\partial F} d\underline{s}\cdot\underline{B} = \mu_0 I\end{matrix}}$$ Ampère

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta\underline{A} = -\mu_0\underline{j}(\underline{r})}$$

Electrostatics (static charge density)

$$\boxed{\begin{matrix}\nabla\times\underline{E} = 0 \\ \Updownarrow \\ \underline{E} = -\nabla\phi\end{matrix}}$$ (curl-free) $\Leftrightarrow \oint_{\partial F} \underline{E}\cdot d\underline{s} = 0$

$$\boxed{\begin{matrix}\epsilon_0\nabla\cdot\underline{E} = \rho \\ \Updownarrow \\ \epsilon_0\oint_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{E} = Q\end{matrix}}$$ diff. form, integral form, Gauss

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\underline{r})}$$ Poisson eq.

only valid if $\operatorname{div}\underline{A} = 0$ (Coulomb gauge)

gauge transformation $\underline{A}' = \underline{A} + \nabla\chi(\underline{r})$

$$\underbrace{\nabla\times(\nabla\times\underline{A}')}_{} = \nabla\times\underline{B} = \mu_0\underline{j}$$

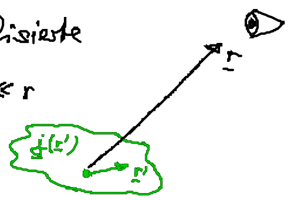
$$\nabla(\underbrace{\nabla\cdot\underline{A}'}_{0}) - \Delta\underline{A}'$$ for Coulomb gauge

2.4. Magnetische Multipole (stationär)

Ausgangspunkt $\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\,\frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$ (Coulomb-Eichung $\operatorname{div}\underline{A} = 0$)

mit Randbed. $\underline{A}(\underline{r}) \to 0$ für $r \to \infty$

Taylorentwicklung von $\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$ für räumlich-lokalisierte stationäre Stromverteilung $\underline{j}(\underline{r}')$ für $r' \ll r$ um $\underline{r}' = 0$:



$$\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{(\underline{r}\cdot\underline{r}')}{r^3} + \dots$$

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\,\underline{j}(\underline{r}') + \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\,(\underline{r}\cdot\underline{r}')\,\underline{j}(\underline{r}') + \dots$$

Monopol-Term

Mit $\underline{\nabla}_{r'} \cdot [x'_k \underline{j}(\underline{r}')] = x'_k \underbrace{(\underline{\nabla}_{r'} \cdot \underline{j})}_{0 \ \text{!stat.!}} + \underbrace{\underline{j} \cdot \underline{\nabla}_{r'} x'_k}_{\sum_\ell j_\ell \delta_{\ell k} = j_k} = j_k$

folgt: $\int d^3r' \, j_k(\underline{r}') = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \underline{\nabla}_{r'} \cdot [x'_k \underline{j}] \underset{\text{Gauss}}{=} \int_{S_\infty} d\underline{f} \cdot x'_k \underline{j} = 0$

Monopol-Term verschwindet!

Dipol-Term

Mit $(\underline{r}' \times \underline{j}) \times \underline{r} = (\underline{r} \cdot \underline{r}')\underline{j} - (\underline{r} \cdot \underline{j})\underline{r}'$ $\qquad \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a}\underline{c}) - \underline{c}(\underline{a}\underline{b})$

(*) $\qquad = 2(\underline{r} \cdot \underline{r}')\underline{j} - [(\underline{r} \cdot \underline{r}')\underline{j} + (\underline{r} \cdot \underline{j})\underline{r}']$ $\qquad \underline{r} \quad \underline{j} \quad \underline{r}'$

und $\underline{\nabla}_{r'} \cdot \{x'_k (\underline{r} \cdot \underline{r}')\underline{j}\} = [(\underline{r} \cdot \underline{r}') j_k + x'_k (\underline{r} \cdot \underline{j}) + x'_k (\underline{r} \cdot \underline{r}') \underbrace{\underline{\nabla} \cdot \underline{j}}_{0 \ \text{stat.!}}]$

folgt

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \underline{\nabla}_{r'} \cdot \{x'_k (\underline{r} \cdot \underline{r}')\underline{j}\}}_{\underbrace{\int_{S_\infty} df' \{x'_k (\underline{r} \cdot \underline{r}')\underline{j}\}}_{0, \ \text{da } j \to 0 \ (r \to \infty)}} = \int d^3r' [(\underline{r} \cdot \underline{r}') j_k + (\underline{r} \cdot \underline{j}) x'_k] = 0$$

$\Rightarrow$ [...] in (*) gibt keinen Beitrag

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' (\underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}'))}_{\underline{m}} \times \underline{r} \qquad \text{Dipolpotenzial}$$

$\underline{m}$ magn. Dipolmoment

$$\boxed{\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \, \underline{m} \times \underline{r}}$$

(analog zu $\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \underline{p} \cdot \underline{r}$ mit $\underline{p} := \int d^3r' \, \underline{r}' \rho(\underline{r}')$

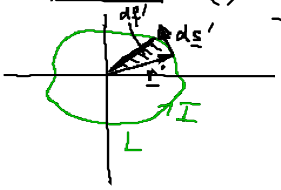
el. Dipolmoment

Magn. Induktion des Dipolmoments $\underline{m}$:

$$\underline{B}(\underline{r}) = \text{rot}\left[\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \underline{m} \times \underline{r}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^5} [3(\underline{m} \cdot \underline{r})\underline{r} - r^2 \underline{m}]$$

(analog $\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} [3(\underline{p} \cdot \underline{r})\underline{r} - r^2 \underline{p}]$ el. Dipolfeld)

Beispiel: (i) **ebene Leiterschleife** L



$$d\underline{f}' = \frac{1}{2}\,\underline{r}'\times d\underline{s}'$$

$$d^3r'\,\underline{j}(\underline{r}') = d\underline{s}'\,I$$

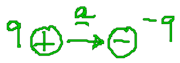
$$\underline{m} = \frac{1}{2}\oint_L d^3r'\,\underline{r}'\times\underline{j}(\underline{r}') = \frac{I}{2}\oint_L \underline{r}'\times d\underline{s}' = I\int_F d\underline{f}' = I F\underline{n}$$

$\underline{n}$ Normale auf der von L eingeschloss. Fläche F

also:

Ringstrom $\longrightarrow$ magn. Dipolmoment $\underline{m}$

(analog 2 Pkt. lad. $\longrightarrow$ el. Dipolmoment $\underline{p} = q\underline{a}$)



(ii) **Bewegte Ladungen**

N Teilchen mit Massen m_i und Ladungen q_i,
spezif. Ladung $\frac{q_i}{m_i} = \frac{q}{m}$ sei konstant:

$$\rho(\underline{r}) = \sum_i q_i\,\delta(\underline{r}-\underline{r}_i)$$

$$\underline{j}(\underline{r}) = \sum_i q_i\,\underline{v}_i\,\delta(\underline{r}-\underline{r}_i) \qquad \text{mit Geschw. } \underline{v}_i = \frac{d\underline{r}_i}{dt}$$

magn. Dipolmoment:

$$\underline{m} = \frac{1}{2}\int d^3r'\,\underline{r}'\times\underline{j}(\underline{r}') = \frac{1}{2}\sum_i q_i\int d^3r'\,\underline{r}'\times\underline{v}_i\,\delta(\underline{r}'-\underline{r}_i)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i q_i\,\underline{r}_i\times\underline{v}_i = \frac{1}{2}\sum_i \underbrace{\frac{q_i}{m_i}}_{\frac{q}{m}}\,\underline{r}_i\times m_i\underline{v}_i = \frac{q}{2m}\,\underline{L}$$

$\underline{L}$ Bahndrehimpuls

$$\boxed{\underline{m} = \frac{q}{2m}\,\underline{L}}$$ gilt auch für starre Körper

gilt nicht für Spin eines Elektrons!

$$\underline{m} = g\,\frac{e}{2m}\,\underline{S} \quad \text{mit } g\approx 2 \quad \text{Landé-Faktor}$$

Kraft auf Stromverteilung $\underline{j}(\underline{r}') = \rho(\underline{r}')\,\underline{v}(\underline{r}')$
im Feld einer magn. Induktion $\underline{B}(\underline{r}')$ (extern)

$$\underline{B}(\underline{r}') = \underline{B}(\underline{r}) + \left[(\underline{r}'-\underline{r})\cdot\underline{\nabla}_r\right]\underline{B}(\underline{r}) + \ldots \quad \text{Taylorentw.}$$

(Probedipol im geg. $\underline{B}(\underline{r})$)

Lorentz-Kraft $\underline{F} = \int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}') \times \underline{B}(\underline{r}')$

$$\Rightarrow \underline{F} = \underbrace{\left[\int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}')\right]}_{\substack{\text{kein Monopol! } 0 \\ \text{(stat.)}}} \times \underline{B}(\underline{r}) + \int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}') \times \left[(\underline{r}'-\underline{r})\cdot\underline{\nabla}_r\right]\underline{B}(\underline{r}) + \ldots$$

$$= \int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}') \times \underbrace{\left[(\underline{r}'\cdot\underline{\nabla}_r)\underline{B}(\underline{r})\right]}_{\underline{\nabla}_r(\underline{r}'\cdot\underline{B}(\underline{r})) - \underline{r}'\times\underbrace{(\underline{\nabla}_r\times\underline{B}(\underline{r}))}_{0\ (\underline{\text{ext}}.!)}} - \underbrace{\int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}')}_{0\ \text{(stat.)}} \times \left[(\underline{r}\cdot\underline{\nabla}_r)\underline{B}(\underline{r})\right] + \ldots$$

$$= \underbrace{\int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}') \times \underline{\nabla}_r(\underline{r}'\cdot\underline{B}(\underline{r}))}_{-\underline{\nabla}_r \times \left[(\underline{r}'\cdot\underline{B})\underline{j}(\underline{r}')\right] + (\underline{r}'\cdot\underline{B})\underbrace{\underline{\nabla}_r \times \underline{j}(\underline{r}')}_{0}}$$

$$= -\underline{\nabla}_r \times \left(\underline{m} \times \underline{B}(\underline{r})\right) = \left(\underline{m}\cdot\underline{\nabla}_r\right)\underline{B}(\underline{r}) = -\underline{\nabla}_r \underbrace{\left(-\underline{m}\cdot\underline{B}(\underline{r})\right)}$$

pot. Energie eines Dipols im Magnetfeld $\boxed{\mathbf{V} = -\underline{m}\cdot\underline{B}(\underline{r})}$

(analog : $V = -\underline{p}\cdot\underline{E}$ für el. Dipol im Feld $\underline{E}(\underline{r})$)

3. Maxwell-Gleichungen im Vakuum

3.1 Induktionsgesetz

Betrachte nun nichtstationäre Ladungs- und Stromdichteverteilung u. Felder

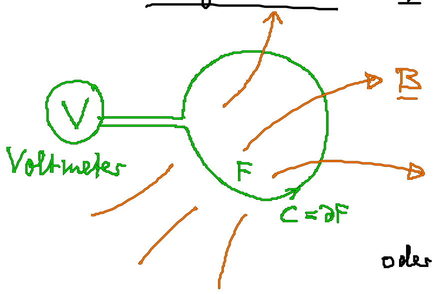
Exp. Erfahrung (Faraday 1831):

zeitl. veränderliche Magnetfelder induzieren eine Spannung in einer Leiterschleife:

$$\boxed{\oint_C \underline{E}\cdot d\underline{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t)}$$ Faraday'sches Induktionsgesetz

induz. Spannung

mit magn. Fluss $\Phi := \int_F \underline{B}\cdot d\underline{f} = \int_F \text{rot}\,\underline{A}\cdot d\underline{f} \overset{\text{Stokes}}{=} \oint_{\partial F} \underline{A}\cdot d\underline{s}$



Änderung des magn. Flusses

a) durch $\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}$ (Trafo)

oder b) durch $\frac{\partial}{\partial t}F$ (Fahrraddynamo mit Permanentmagn., Generator)

Φ hängt nur vom Rand ∂F von F ab:

Seien F, F' 2 Flächen mit demselben Rand ∂F, die das Volumen V einschließen

$$\int_F d\underline{f}\cdot\underline{B} - \int_{F'} d\underline{f}\cdot\underline{B} = \oint_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{B} \overset{\text{Gauß}}{=} \int_V d^3r\, \underbrace{\text{div}\,\underline{B}}_{0} = 0$$

Potentialdifferenz bei 1 Umlauf um δF:

$$\Delta\phi = U_{ind} = -\oint_C \underline{E}\cdot d\underline{s}$$ induzierte Spannung