English Summary:

Inhomogeneous Maxwell's eqs.: $\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^\nu}$

(4-divergence)

Relativistic Hamilton's Principle

$$\boxed{\delta W = \delta \int_1^2 \left\{ -m_0 c\, ds - \frac{q}{c} \phi^\mu dx_\mu \right\} = 0}$$

free Lagrangian   Lagrangian of field-matter interaction

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{d}{ds} p^\mu = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu}$$

$i=1,2,3$: Newton's Law $\frac{d}{dt}\underline{p} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$ Lorentz force

$\mu = 0$: power balance $\frac{dE}{dt} = q\, \underline{E} \cdot \underline{v}$

6.6 Eichinvarianz und Ladungserhaltung

Wirkungsintegral $W = -m_0 c \underbrace{\int_1^2 ds}_{\substack{W_t \\ \text{(Teilchen)}}} - \underbrace{\frac{q}{c} \int_1^2 dx_\nu \phi^\nu}_{\substack{W_{tf} \\ \text{(Teilchen-Feld-WW)}}}$

Verallgemeinerung auf kontinuierliche Massendichte $\mu(x^\nu)$:

$$\boxed{W_t = -c \int d^3r\, \mu \int_1^2 ds = -\int_\Omega d\Omega\, \mu \frac{ds}{dt}}$$

$d\Omega := d^3r\, c\, dt = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ Volumenelement im Minkowski-Raum

(i) $d\Omega$ ist eine Lorentz-Invariante, da das Volumen unter orthogonalen Transformationen $U^\nu{}_\kappa$ erhalten wird.

(ii) Aus $dm_0 dx^\nu = \frac{\mu}{c} \frac{dx^\nu}{dt} \underbrace{d^3r\, c\, dt}_{d\Omega} = \frac{1}{c} \mu \frac{dx^\nu}{dt} d\Omega$ folgt, dass die 4-Massenstromdichte

$\mu \frac{dx^\nu}{dt} \equiv g^\nu$ ein 4-Vektor ist, da dm_0, $d\Omega$

Lorentz-Skalare (nicht Lorentz-invariant: μ, dt)

(iii) $\underbrace{\mu^2 \frac{dx^\nu dx_\nu}{dt^2}}_{g^\nu g_\nu} = \left(\mu \frac{ds}{dt}\right)^2$ ist Lorentz-Invariante

also auch $\mu \frac{ds}{dt}$

$\Rightarrow$ W_t ist Lorentz-Invariante.

WW einer kontinuierlichen Ladungsdichte $\varrho(x^\nu)$ mit Feld:

$$W_{tf} = -\frac{1}{c} \int d^3r \, \varrho \int dx_\nu \phi^\nu$$

$$= -\frac{1}{c^2} \int \underbrace{d^3r \, c\,dt}_{d\Omega} \, \underbrace{\varrho \frac{dx_\nu}{dt}}_{j_\nu} \phi^\nu$$

mit 4-Ladungsstromdichte j_ν

$$\left(\begin{array}{ll} j^0 := \varrho \frac{dx^0}{dt} = c\varrho & \\ j^i := \varrho v^i & i = 1,2,3 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{W_{tf} = -\frac{1}{c^2} \int_\Omega d\Omega \, j_\nu \phi^\nu}$$

Also $W = \int_\Omega d\Omega \, \mathcal{L}(x^\nu)$ mit der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} := -\mu \frac{ds}{dt} - \frac{1}{c^2} j_\nu \phi^\nu \qquad d\Omega \equiv d^4x$$

Umeichung

$$\tilde{\phi}^\nu = \phi^\nu + \partial^\nu \varphi$$

$$\tilde{W}_{tf} = -\frac{1}{c^2} \int_\Omega d\Omega \, j_\nu \tilde{\phi}^\nu = -\frac{1}{c^2} \int_\Omega d\Omega \, j_\nu (\phi^\nu + \partial^\nu \varphi)$$

$$= W_{tf} - \frac{1}{c^2}\int_\Omega d\Omega\, \underbrace{j_\nu \partial^\nu \varphi}_{\partial^\nu(\varphi j_\nu) - \varphi(\partial^\nu j_\nu)}$$

$$= W_{tf} - \frac{1}{c^2}\underbrace{\int_\Omega d\Omega\, \partial^\nu(\varphi j_\nu)}_{\int_{\mathbb{R}^3} d^3r\, c\int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{\partial}{c\partial t}(\varphi c\rho) - c\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathbb{R}^3} d^3r\, \underline{\nabla}\cdot(\varphi \underline{j})} + \frac{1}{c^2}\int_\Omega d\Omega\, \varphi(\partial^\nu j_\nu)$$

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3r\, c\int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{\partial}{c\partial t}(\varphi c\rho)}_{[\varphi\rho]_{t_1}^{t_2}} \qquad \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3r\, \underline{\nabla}\cdot(\varphi\underline{j})}_{\oint d\underline{f}\, \varphi \underline{j} = 0}$$

weglassen, da Var. bei t_1, t_2 verschwindet $\longleftarrow [\varphi\rho]_{t_1}^{t_2}$

$$\Rightarrow \tilde{W}_{tf} = W_{tf} + \frac{1}{c^2}\int_\Omega d\Omega\, \varphi\, \underbrace{(\partial^\nu j_\nu)}_{0 \text{ wegen Ladungserhaltung}}$$

Fazit: Äquivalenz zwischen Eichinvarianz $\tilde{W}_{tf} = W_{tf}$ und Ladungserhaltung $\partial^\nu j_\nu = 0$

(tiefer Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen)

klass. Mechanik: Noether-Theorem

6.7. Inhomogene Maxwell-gleichungen aus dem Wirkungsprinzip

Die Beweg.gl. für ein Teilchen im Feld $F^{\nu\kappa}$

$$\frac{d}{ds}p^\nu = \frac{q}{c}F^{\nu\kappa}u_\kappa$$

sowie die homogenen Maxwell-gln.

$$\epsilon_{\nu\kappa\lambda\pi}\partial^\kappa F^{\lambda\pi} = 0 \quad \left(\text{wegen } F^{\lambda\pi} = \partial^\lambda\phi^\pi - \partial^\pi\phi^\lambda\right)$$

ergeben sich aus den Wirkungsintegralen

$$W_t + W_{tf} = \int_\Omega d\Omega \left\{ \underbrace{-\rho \frac{ds}{dt}}_{\text{Teilchen}} \underbrace{- \frac{1}{c^2} j_\nu \phi^\nu}_{\text{Teilchen-Feld-WW}} \right\}$$

durch Var. der Bahn bei gegebenen Potenzialen $\phi^\nu(x^\lambda)$.

Vermutung:

Erzeugung von Feldern durch Ladungen (d.h., die inhomog. Maxwell-Gln. ergeben sich durch Variation der Felder bzw. Pot. bei geg. Bahnen.)

Frage: Lagrangedichte $\mathcal{L}_f$ zur Beschreibung der Dynamik der Felder?

Ansatz: $W_f = \int_\Omega d\Omega\, \mathcal{L}_f(F^{\nu\kappa}, \phi^\nu)$

Forderungen: (i) Feldgln. linear $\Rightarrow \mathcal{L}_f$ bilinear in $F^{\nu\kappa}, \phi^\nu$

(ii) Eindeutige Determinierung durch $F^{\nu\kappa}$
$\Rightarrow$ keine Ableitungen $\partial^\lambda F^{\nu\kappa}$

(iii) Eichinvarianz $\Rightarrow \phi^\nu \phi_\nu$ darf nicht auftreten

(iv) Lorentzinvarianz

$$\Rightarrow \mathcal{L}_f = -\alpha F^{\nu\kappa} F_{\nu\kappa}$$

$$\boxed{W = \int d\Omega \left\{ \underbrace{-\rho \frac{ds}{dt}}_{W_t} \underbrace{- \frac{1}{c^2} j_\nu \phi^\nu}_{W_{tf}} \underbrace{- \alpha F^{\nu\kappa} F_{\nu\kappa}}_{W_f} \right\}}$$

Variation für feste Bahn (d.h. festes j_ν):

$$\delta W = \int d\Omega \Big\{ -\frac{1}{c^2} \underbrace{j_\nu \delta\phi^\nu}_{j^\nu \delta\phi_\nu} - \alpha\, \delta (F^{\nu\kappa} F_{\nu\kappa}) \Big\}$$

$$\delta(F^{\nu\kappa} F_{\nu\kappa}) = \underbrace{(\delta F^{\nu\kappa}) F_{\nu\kappa}}_{(\delta F_{\nu\kappa}) F^{\nu\kappa}} + F^{\nu\kappa} (\delta F_{\nu\kappa}) = 2 F^{\nu\kappa} \delta F_{\nu\kappa}$$

Mit $\delta F_{\nu\kappa} = \delta(\partial_\nu \phi_\kappa - \partial_\kappa \phi_\nu) = \partial_\nu \delta\phi_\kappa - \partial_\kappa \delta\phi_\nu$

$$2F^{\nu\kappa}\delta F_{\nu\kappa} = \underbrace{2F^{\nu\kappa}\partial_\nu \delta\phi_\kappa}_{2F^{\kappa\nu}\partial_\kappa\delta\phi_\nu} - 2F^{\nu\kappa}\partial_\kappa \delta\phi_\nu = -4F^{\nu\kappa}\partial_\kappa\delta\phi_\nu$$

$$2F^{\kappa\nu}\partial_\kappa\delta\phi_\nu \overset{\text{antisymm.}}{=} -2F^{\nu\kappa}\partial_\kappa\delta\phi_\nu$$

$$\Rightarrow \delta W = \int d\Omega \Big\{ -\frac{1}{c^2} j^\nu \delta\phi_\nu + 4\alpha F^{\nu\kappa}\partial_\kappa \delta\phi_\nu \Big\}$$

[Mit dem verallgem. Gauß'schen Satz (in 4D)

$$\int_\Omega d\Omega\, \partial_\kappa (F^{\nu\kappa}\delta\phi_\nu) = \int_{\partial\Omega} df_\kappa F^{\nu\kappa}\delta\phi_\nu = 0$$

$\partial\Omega$ (3-dim. Rand des 4-dim. Vol.

$\Omega = \mathbb{R}^3 \times [t_1, t_2)$, $F^{\nu\kappa} \to 0$ $x^i \to \infty$ $(i = 1,2,3)$

$\delta\phi_\nu\big|_{t_1,t_2} = 0$]

wird

$$\int d\Omega\, F^{\nu\kappa}\partial_\kappa\delta\phi_\nu = \underbrace{\int d\Omega\, \partial_\kappa (F^{\nu\kappa}\delta\phi_\nu)}_{0} - \int d\Omega\, (\partial_\kappa F^{\nu\kappa})\delta\phi_\nu$$

Also

$$\delta W = \int_\Omega d\Omega \Big\{ -\frac{1}{c^2} j^\nu - 4\alpha (\partial_\kappa F^{\nu\kappa}) \Big\} \delta\phi_\nu \overset{!}{=} 0$$

für bel. $\delta\phi_\nu$

$$\Leftrightarrow \partial_\kappa F^{\nu\kappa} = -\frac{1}{4\alpha c^2} j^\nu$$

$$\Leftrightarrow \partial_\kappa F^{\kappa\nu} = \frac{1}{4\alpha c^2} j^\nu$$

Wahl der Einheiten: $\alpha = \dfrac{\epsilon_0}{4c}$:

$$\boxed{\partial_\kappa F^{\kappa\nu} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^\nu}$$ inhomogene Maxwell-Gln.

Interpretation der Lagrangedichte der Felder

$$W_f = \int_\Omega d\Omega \, \mathcal{L}_f \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}_f = -\frac{\epsilon_0}{4c} F^{\nu\kappa} F_{\nu\kappa} = \frac{\epsilon_0}{4c} F^{\nu\kappa} F_{\kappa\nu}$$

$$\mathcal{L}_f = \frac{1}{2c} \left(\underline{E} \cdot \underline{D} - \underline{B} \cdot \underline{H} \right) \qquad c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

$$\neq \quad u = \frac{1}{2} \left(\underline{E} \cdot \underline{D} + \underline{B} \cdot \underline{H} \right) \qquad \text{Energiedichte}$$

Analogie: $q, \dot{q}$ (harmon. Osz. in der Mechanik)

$$E = \frac{m}{2} \dot{q}^2 + \frac{m}{2} \omega^2 q^2 = T + V$$

$$L = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{m}{2} \omega^2 q^2 = T - V$$