English Summary:

<u>Coulomb gauge</u> $\underline{\nabla}\cdot\underline{A}=0 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\begin{array}{l}\Delta\phi=-\frac{1}{\epsilon_0}\rho\\ \Box\underline{A}=-\mu_0\underline{j}_t\end{array}}$

transversal current density $\underline{\nabla}\cdot\underline{j}_t=0$

longitudinal " " $\underline{\nabla}\times\underline{j}_l=0$

<u>free electromagn. waves</u> $\Box\phi=0$

(Lorenz gauge) $\Box\underline{A}=0$

wave packet $u(\underline{r},t)=\int d^3k\,\tilde{u}(\underline{k})\,e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega(\underline{k})t)}$

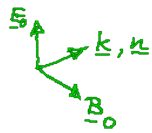
$\omega(\underline{k})=c|\underline{k}|$

<u>Energiedichte</u> der el.magn. Welle:

Sei $\underline{E}_0$ reell $\Rightarrow$ $\underline{E}(\underline{r},t)=\underline{E}_0\cos(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)$

$\underline{B}(\underline{r},t)=\underline{B}_0\cos(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)$

$\underline{B}_0=\frac{1}{c}\underline{n}\times\underline{E}_0$




Energiedichte $w=\frac{\epsilon_0}{2}\underline{E}^2+\frac{1}{2\mu_0}\underline{B}^2$

$=\frac{\epsilon_0}{2}\underline{E}^2+\frac{1}{2\mu_0}\frac{1}{c^2}\underline{E}^2 \qquad \frac{1}{c^2}=\epsilon_0\mu_0$

$=2\cdot\frac{\epsilon_0}{2}\underline{E}^2$

Energiestromdichte: $\underline{S}=\frac{1}{\mu_0}\underline{E}\times\underline{B}$

$=\frac{1}{c\mu_0}\underline{E}\times(\underline{n}\times\underline{E})$

$=\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\,E^2\underline{n}$

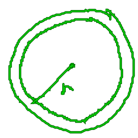
$=c\,\epsilon_0\,E^2\underline{n}$

$=c\,w\,\underline{n} \quad , \quad \underline{n}\equiv\frac{\underline{k}}{|\underline{k}|}$

<u>Kugelwelle</u>: $\underline{E}(r,t)=\frac{1}{r}E_0\,e^{i(kr-\omega t)}$

Energie in Kugelschale mit Radius $r$ und Dicke $dr$:

$W(r)=4\pi r^2 dr\,\epsilon_0\underline{E}^2 = 4\pi r^2 dr\,\epsilon_0\frac{E_0^2}{2}=\text{const.}$




↑ Raum-/Zeitmittel über $\exp\{\}$

## 4.2 Retardierte Potenziale

Aufgabe: Lösung der inhomog. Wellengln.

$$\boxed{\begin{aligned} \Box\phi &= -\frac{1}{\epsilon_0}\rho \\ \Box\underline{A} &= -\mu_0\underline{j} \end{aligned}}$$

(Lorenz-Eichung)

zu vorgeg. erzeugenden Quellen $\rho(\underline{r},t)$, $\underline{j}(\underline{r},t)$ und Randbed. $\phi, \underline{A} \to 0$ für $r\to\infty$.

Methode: Green'sche Fkt. $G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')$

$$\boxed{\Box u(\underline{r},t) = -f(\underline{r},t)}$$

Fourier-Trafo $\Downarrow$ $\quad u := \begin{cases}\phi \\ \underline{A}\end{cases}$

$\hat{\Box}^{-1} = -\hat{G}$ $\quad f := \begin{cases}\rho/\epsilon_0 \\ \mu_0\underline{j}\end{cases}$

$$\boxed{\hat{u}(\underline{k},\omega) = \hat{G}\cdot\hat{f}(\underline{k},\omega)}$$

Rück-Trafo $\Downarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} &u(\underline{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')\, f(\underline{r}',t') \\ &\text{mit } \Box G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = -\delta(\underline{r}-\underline{r}')\,\delta(t-t') \end{aligned}}$$

vgl. Elektrostatik

$$\Delta\phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\underline{r})$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{\phi}(\underline{k}) = \hat{G}\hat{\rho}, \quad \hat{G} = \frac{1}{\epsilon_0 k^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\phi(\underline{r}) = \int d^3r'\, G(\underline{r}-\underline{r}')\rho(\underline{r}')$$

mit $G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$

$$\Delta G(\underline{r}-\underline{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

Kausalitätsbed.: $G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') \overset{!}{=} 0$ für $t'>t$

damit $u(\underline{r},t)$ nur von $f(\underline{r}',t')$ mit $t'<t$ (Vergangenheit) beeinflusst wird.

Fourier-Transformation:

$$f(\underline{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \hat{f}(\underline{q},\omega)\, e^{i(\underline{q}\cdot\underline{r}-\omega t)}$$

$$\hat{f}(\underline{q},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(\underline{r},t)\, e^{-i(\underline{q}\cdot\underline{r}-\omega t)}$$

Ebenso:

$$u(\underline{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \hat{u}(\underline{q},\omega)\, e^{i(\underline{q}\cdot\underline{r}-\omega t)}$$

$$\Box u(\underline{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \hat{u}(\underline{q},\omega)\, \underbrace{\Box e^{i(\underline{q}\cdot\underline{r}-\omega t)}}_{-\left(q^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)e^{i(\underline{q}\cdot\underline{r}-\omega t)}}$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \hat{f}(\underline{q},\omega)\, e^{i(\underline{q}\cdot\underline{r}-\omega t)}$$

$$\Rightarrow \left(q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\hat{u}(\underline{q},\omega) = \hat{f}(\underline{q},\omega)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\hat{u}(\underline{q},\omega) = \frac{\hat{f}(\underline{q},\omega)}{q^2-\frac{\omega^2}{c^2}}} \qquad \text{d.h. } \hat{G} = \frac{1}{q^2-\frac{\omega^2}{c^2}}$$

Rück-Trafo:

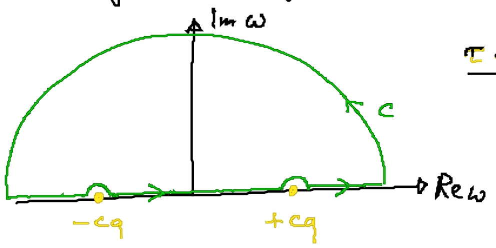
$$u(\underline{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \frac{e^{i(\underline{q}\cdot\underline{r}-\omega t)}}{q^2-\frac{\omega^2}{c^2}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt'\ f(\underline{r}',t')\, e^{-i(\underline{q}\cdot\underline{r}'-\omega t')}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \underbrace{\left\{\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \frac{e^{i\underline{q}(\underline{r}-\underline{r}')-i\omega(t-t')}}{q^2-\frac{\omega^2}{c^2}}\right\}}_{G(\underline{r}-\underline{r}',\,t-t')} f(\underline{r}',t')$$

<u>Berechnung der Green'schen Fkt. durch komplexe Integration</u>

Integrand hat Pole bei $\omega = \pm cq$

Green'sche Fkt. wird eindeutig durch Festlegung des Integrationswegs um die Pole herum:



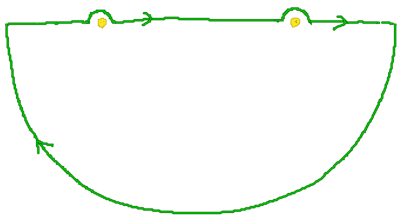

<u>$\tau < 0$</u>

<u>Integral über Halbkreis</u>

$\omega = Re^{i\varphi} \qquad 0 \le \varphi \le \pi$

$d\omega = Re^{i\varphi}\, i\, d\varphi \qquad \boxed{\tau \equiv t - t'}$

$$|e^{-i\omega\tau}| = e^{R\underbrace{(\sin\varphi)}_{>0}\underbrace{\tau}_{<0}} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$



$\underline{\tau > 0}$ : $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$

$$|e^{-i\omega\tau}| = e^{R\underbrace{(\sin\varphi)}_{<0}\underbrace{\tau}_{>0}} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$$\Gamma(\underline{q},\tau) := \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \frac{e^{-i\omega\tau}}{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = \oint_C d\omega \, \frac{e^{-i\omega\tau}}{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = 2\pi i \sum_{\text{Pole}} \text{Res}$$

$\underline{\tau < 0}$ : keine Pole im Inneren von $C$

$$\Rightarrow \Gamma(\underline{q},\tau) = 0 \implies \boxed{G(\underbrace{\underline{r}-\underline{r}'}_{\underline{s}}, \underbrace{t-t'}_{\tau}) = 0 \quad \text{für } t < t'}$$

Dies ist die <u>Kausalitätsbedingung</u>!

$\underline{\tau > 0}$ :
$$\Gamma(\underline{q},\tau) = -2\pi i \sum_{\omega = \pm cq} \text{Res} \, \frac{e^{-i\omega\tau}}{(-\frac{1}{c^2})(\omega - cq)(\omega + cq)}$$

da $\underset{\text{math. pos. Sinn}}{\oint} dz\, f(z) = 2\pi i \sum \text{Res}\, f(z) \longleftrightarrow$ hier $\circlearrowright$

$$\Gamma(\underline{q},\tau) = 2\pi i c^2 \left( \frac{e^{-icq\tau}}{2cq} + \frac{e^{icq\tau}}{-2cq} \right)$$

$$G(\underline{s},\tau) = \frac{c}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3q \, e^{i\underline{q}\cdot\underline{s}} \left( \frac{e^{-icq\tau} - e^{icq\tau}}{-2iq} \right)$$

Auswertung in Kugelkoord.: $d^3q = q^2 dq \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$

$\underline{q}\cdot\underline{s} = q s \cos\vartheta$

$$G(\underline{s},\tau) = \frac{c}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dq \, q \, \frac{e^{-icq\tau} - e^{icq\tau}}{-2i} \underbrace{\int_{-1}^{1} d(\cos\vartheta) e^{iqs\cos\vartheta}}_{\frac{e^{iqs} - e^{-iqs}}{iqs}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}$$

$\xi := cq$

$$= \frac{1}{2(2\pi)^2 s}\int_0^\infty d\xi \left\{ \underbrace{e^{i(\tau-\frac{s}{c})\xi} + e^{-i(\tau-\frac{s}{c})\xi}} - \underbrace{e^{i(\tau+\frac{s}{c})\xi} - e^{-i(\tau+\frac{s}{c})\xi}} \right\}$$

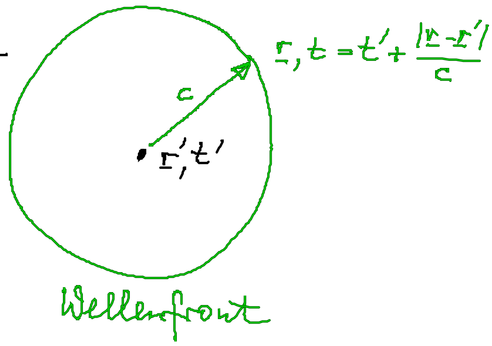
$$\boxed{\text{Fourier: } \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} = \delta(x)}$$

$$= \frac{1}{4\pi s}\left\{ \delta\left(\tau - \frac{s}{c}\right) - \underbrace{\delta\left(\tau + \frac{s}{c}\right)}_{0 \text{ für } \tau > 0} \right\}$$

Erg.:

$$\boxed{G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = \begin{cases} \frac{1}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|}\,\delta\left(t-t'-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right) & t > t' \\ 0 & t < t' \end{cases}}$$

<u>retardierte Green'sche Fkt.</u>
(kausal)

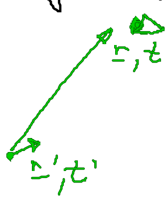



<u>Physik. Interpretation:</u>

$G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')$ ist die Lösung der Wellengl.

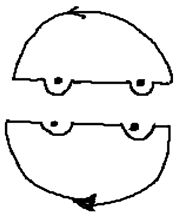
$\Box\phi(\underline{r},t) = -\frac{\rho(\underline{r},t)}{\epsilon_0}$ zu einer punktförmigen Ladungsdichte $\rho/\epsilon_0 = \delta(\underline{r}-\underline{r}')\delta(t-t')$ am Ort $\underline{r}'$ zur Zeit $t'$.

Eigenschaften: (i) Kausalität




(ii) Ausbreitung der Punktstörung als <u>kugelförmige Wellenfront</u> mit Phasengeschw. $c$: $|\underline{r}-\underline{r}'| = c(t-t')$

NB: Für den Integrationsweg



$\tau < 0$

$\tau > 0$

erhält man die avancierte Greenfkt. ($= 0$ für $t > t'$), die eine einlaufende Kugelwelle beschreibt, welche sich auf den Punkt $\underline{r}'$ zur Zeit $t'$ zusammenzieht.

- Mit $$u(\underline{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{-\infty}^{t} dt' \, \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|} \, f(\underline{r}',t')$$
$$= \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{f\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

folgt:

Retardierte Potenziale für bel. $\rho(\underline{r},t)$, $\underline{j}(\underline{r},t)$:

$$\boxed{\begin{aligned} \Phi(\underline{r},t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{\rho\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \\ \underline{A}(\underline{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{\underline{j}\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \end{aligned}}$$

$\Phi$, $\underline{A}$ sind bestimmt durch $\underline{r}'$ zu den retardierten Zeiten $t' = t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}$ $\Longrightarrow$ endl. Ausbreitungsgeschw. der elektromagn. Wirkungen oder Felder mit $c$.