English Summary:

Conductors in electrostatics

charge $\boxed{Q_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} C_{\alpha\beta}\,\phi_\beta}$ $\alpha = 1, \dots, n$ capacitance coefficients $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$

field energy $W = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}\,\phi_\alpha\,\phi_\beta$

Charge continuity eq. $\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{r},t) + \operatorname{div}\underline{j}(\underline{r},t) = 0}$ $\underline{j}(\underline{r},t) = \rho(\underline{r},t)\,\underline{v}(\underline{r},t)$

Stationary current: $\operatorname{div}\underline{j} = 0 \Rightarrow$ Kirchhoff's Law $\sum I_{in} = \sum I_{out}$

Ohm'sches Gesetz

Exp. Erfahrung: $U \sim I$ in Leitern bei nicht zu hohen Spannungen

$U = RI$ mit el. Widerstand $R$

lokale Form des Ohm'schen Gesetzes:

$\boxed{\underline{j}(\underline{r},t) = \sigma\,\underline{E}(\underline{r},t)}$ el. Leitfähigkeit $\sigma = \text{const.}$ (Drude)

Energiedissipation:

a) El. Arbeit im el. Feld: $dW = \underline{F}.d\underline{s} = q\,\underline{E}.d\underline{s}$

el. Leistung: $P = \frac{dW}{dt} = q\,\underline{E}.\underline{v}$

b) kontin. Ladungsverteilung $\rho(\underline{r})$

El. Leistung am Volumenelement $d^3r$: $dP = \underbrace{\underline{E}(\underline{r}).\underline{j}(\underline{r})}_{\text{Leistungsdichte}}d^3r$

$$P = \int_V \underline{j}(\underline{r}).\underline{E}(\underline{r})\,d^3r$$

globale Bilanz: im Feld aufgenommene Leistung

$\stackrel{!}{=}$ durch Stoßprozesse an das Kristallgitter dissipierte Leistung

(= Joule'sche Wärme)

Ohm: $\underline{E}.\underline{j} = \sigma\,\underline{E}^2$

gesamte Verlustleistung: $P = \int \underline{j}.\underline{E}\,d^3r = IU = RI^2$

## 2.2 Magnetische Induktion

Experimentelle Erfahrung:

WW zwischen bewegten Ladungen:

Kraft auf Ladung $q$, die sich mit $\underline{v}$ bewegt:

$$\boxed{\underline{F} = q\underline{v} \times \underline{B}(\underline{r})} \qquad \text{Lorentz-Kraft}$$

$\underline{B}(\underline{r})$ = magnet. Induktion am Ort $\underline{r}$, erzeugt von anderen bewegten Ladungen mit Stromdichte $\underline{j}(\underline{r}')$

$$\boxed{\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}} \qquad \text{Ampère-Gesetz}$$

(Analog zur Coulomb-WW in der Elektrostatik: $\underline{F} = q\underline{E}(\underline{r})$, $\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r' \, \rho(r') \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$)

Einheiten (SI): $[B] = 1\,\frac{Ns}{Cm} = 1\,\underbrace{\frac{kg\,m^2}{Cs^2}}_{V}\frac{s}{m^2} = 1\,T = 1$ Tesla

Damit ist $\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6}\,\frac{Vs}{Am}$ festgelegt (nicht wie $\epsilon_0$ frei wählbar!)

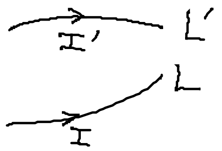
(Die magn. Induktion beschreibt keine neue, von der Coulomb-WW unabh. WW: Betrachte Transformation auf lokales Ruhsystem einer bewegten Ladung!)

Gauss-System: $\underline{F} = \frac{q}{c}\underline{v} \times \underline{B}$, $\underline{B} = \frac{1}{c}\int d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$

$$[B] = \frac{dyn}{ESE} = \frac{\sqrt{dyn}}{cm} = 1\,G = 1\,\text{Gauß}$$

$$\underline{F} = q\underline{v} \times \frac{\underline{B}}{c} \quad \Rightarrow \quad 1\,G/c = 10^{-4}\,T$$

Kraft zwischen 2 stromdurchflossenen Leitern




Betrachte 2 dünne Leiter $L, L'$
mit zeitkonstanten Strömen $I, I'$

Strom durch $L'$: $\underline{j}\, d^3r' = \varrho\, d^3r\, \underbrace{\underline{v}'}_{\frac{d\underline{r}'}{dt}} = \underbrace{\varrho \frac{d^3r'}{dt}}_{I'} d\underline{r}' = I' d\underline{r}'$

$\Rightarrow$ magn. Induktion $\boxed{\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I' \int_{L'} d\underline{r}' \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}}$ Biot-Savart-Gesetz

Kraft auf Ladung im Volelement $d^3r$ von $L$:

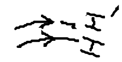
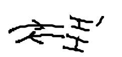
$$d\underline{F} = \varrho\, \underline{v} \times \underline{B}\, d^3r = \underline{j} \times \underline{B}\, d^3r = I\, d\underline{r} \times \underline{B}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I I' \int_L d\underline{r} \times \int_{L'} d\underline{r}' \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}}$$ Kraft von $L'$ auf $L$

Mit $d\underline{r} \times (d\underline{r}' \times (\underline{r}-\underline{r}')) = (d\underline{r} \cdot (\underline{r}-\underline{r}'))\, d\underline{r}' - (d\underline{r} \cdot d\underline{r}')(\underline{r}-\underline{r}')$

und $\int_L d\underline{r} \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} = -\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\Big|_{L-\text{Anfang}}^{L-\text{Ende}} = 0$ $\left(\begin{array}{c} L \text{ geschlossen} \\ \text{oder} \\ L\text{-Enden in } \infty \end{array}\right)$

folgt
$$\boxed{\underline{F} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I I' \iint_{L\,L'} (d\underline{r} \cdot d\underline{r}') \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}}$$

$\Rightarrow$ für parallele Ströme $(I\, d\underline{r}\, I' d\underline{r}' > 0)$ : Anziehung 
" antiparallele " $( \quad < 0)$ : Abstoßung 

## 2.3 Magnetostatische Feldgleichungen

(gilt auch in quasistat. Näherung: zeitl. Änderung $\ll$ räuml. Änderung)

Mit dem Vektorpotenzial (nicht eindeutig!)

Umeichung $\underline{A} \to \underline{A} + \nabla\Phi$ mit bel. $\Phi(\underline{r},t)$ möglich, da $\nabla \times \nabla\Phi = 0$

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

läßt sich

$$\boxed{\underline{B}(\underline{r}) = \text{rot}\, A(\underline{r})}$$

schreiben.

Beweis:
$$\nabla \times \underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \underbrace{\left(\nabla_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right)}_{-\frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}} \times \underline{j}(\underline{r}')$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} = \underline{B}$$

Folgendes ist äquivalent:

(i) $\underline{B}(\underline{r}) = \text{rot}\, \underline{A}$ hat Vektorpotenzial

$\Updownarrow$

(ii) $\boxed{\text{div}\, \underline{B} = 0}$ $\qquad (\nabla \cdot (\nabla \times A) \equiv 0)$

Es gibt keine Quellen der magn. Induktion ("magn. Ladungen")

$\Updownarrow$

$\oint_{\partial V} \underline{B} \cdot d\underline{f} = 0$

Aber: „Magn. Monopole" postuliert von Dirac (1931) zur Erklärung der Quantelung der Ladung (aus der Quantisierung des Drehimpulses). Aufgegriffen durch die vereinheitlichten Feldtheorien.
Extrem schwere magn. Monopole wurden beim Urknall innerhalb $10^{-35}$s erzeugt. Umstritten: Exp. Nachweis (?) durch supraleitende Spule
(H. Mitter: Elektrodynamik)

**Zusammenhang zwischen $\underline{B}$ und $\underline{j}$:**
(auch nichtstationär)

$$\text{rot}\,\underline{B} = \underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{A}) = \underline{\nabla}\,(\underline{\nabla}\cdot\underline{A}) - \Delta\underline{A}$$

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\;\underline{\nabla}_r\cdot\left(\frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\;\underline{j}(\underline{r}')\cdot\underbrace{\underline{\nabla}_r\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{-\underline{\nabla}_{r'}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\left[\underbrace{-\underline{\nabla}_{r'}\left(\frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right)}_{\text{gauß'scher Satz}} + \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\underbrace{\underline{\nabla}_{r'}\cdot\underline{j}(\underline{r}')}_{-\frac{\partial}{\partial t}\rho\ \text{Kontinuitätsgl.}}\right]$$

$$= \underbrace{-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S(\to\infty)} d\underline{f}'\cdot\frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{\text{0 für hinreichend rasch abfallendes } \underline{j}(\underline{r}')} \underbrace{-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\rho(\underline{r}',t)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{\mu_0\epsilon_0\,\phi(\underline{r},t)}$$

$$\Rightarrow\quad \underline{\nabla}\,(\underline{\nabla}\cdot\underline{A}) = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\underline{E}$$

$$\Delta\underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\;\underline{j}(\underline{r}')\underbrace{\Delta_r\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{-4\pi\delta(\underline{r}-\underline{r}')} = -\mu_0\,\underline{j}(\underline{r},t)$$

Also: $\boxed{\text{rot}\,\underline{B} = \mu_0\underline{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\underline{E}}$

Verschiebungsstromdichte
= nichtstationärer Beitrag!

<u>Für stationäre Strom- u. Ladungsverteilungen:</u>

$\boxed{\text{rot}\,\underline{B} = \mu_0\underline{j}}$ differenzielle Form des Ampère-Gesetzes

(Ströme sind die Wirbel der magn. Induktion)

Integration über Fläche F :

$$\int_F d\underline{f} \cdot \mathrm{rot}\, \underline{B} \overset{\text{Stokes}}{=} \oint_{\partial F} d\underline{s} \cdot \underline{B} = \mu_0 \underbrace{\int_F d\underline{f} \cdot \underline{j}(\underline{r})}_{I \text{ Strom durch } F}$$


$$\Rightarrow \boxed{\oint_{\partial F} d\underline{s} \cdot \underline{B}(\underline{r}) = \mu_0 I}$$ Integralform (<u>Durchflutungsgesetz</u>)