4.4.2. Thermisches Licht (statistischer Operator ρ_{th})

- aus Statistik: Planckscher Strahler
- Licht emittiert von „Ofen" bei Temperatur T

hier: 1 Mode bei T : $H = \hbar\omega c^+ c$

- gemischter Zustand muss durch statistischen Operator ρ_{th} beschrieben werden, hier kanonisches Ensemble

$$\rho_{th} = \underset{\substack{\nearrow \\ \text{Zustandssumme}}}{\frac{1}{Z}} \, e^{-\beta H} \qquad \beta = \frac{1}{kT} \qquad = \frac{1}{Z} e^{-\beta\hbar\omega c^+ c}$$

Mittelwert: $\langle \underset{\substack{\nearrow \\ \text{Operator}}}{\underline{O}} \rangle = sp\left(\underline{O}\,\rho_{th}\right)$ in statistischer Physik

<u>Bemerkg.:</u>

a/ Licht das durch Umgebung / exp. Bedingg. viele Wellenzüge und Photonzahl stochastisch enthält wird i.a. „chaotisches Licht" genannt

(thermisches Licht ist Bsp.)

<u>math. Def.:</u> alles Licht mit $\Delta n, \Delta E > \Delta n_{\text{gequetscht}}, \Delta E_{\text{gequetscht}}$ wird chaotisch Licht genannt

b) bekannt über Planckverteilg. ist Mittelwert $\langle n \rangle$ für thermisches Licht

$$n_B = \langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1} = f(T)$$

Boseverteilg.

$$\left(\underline{NR:} \quad e^{\beta\hbar\omega} = \frac{\langle n \rangle + 1}{\langle n \rangle} = \frac{n_B+1}{n_B} \right)$$

c) Zustandssumme, ebenso bekannt aus Statistischer Physik: $Z = 1 + \langle n \rangle = 1 + n_B$

Erinnerung: $Z = sp\left(e^{-\beta H}\right) = \sum_n \langle n | e^{-\beta H} | n \rangle = \cdots$

Charakterisierg. des therm. Zustands:

(i) Photonenverteilg.

$$\rho_n = \langle n | \rho_{th} | n \rangle = \frac{1}{Z} \langle n | e^{-\beta\hbar\omega c^+ c} | n \rangle = \frac{1}{Z} e^{-\beta\hbar\omega n}$$

Wahrscheinlichkeit daß System in Zustand mit n-Photon zu finden

$$c^+ c |n\rangle = n |n\rangle$$

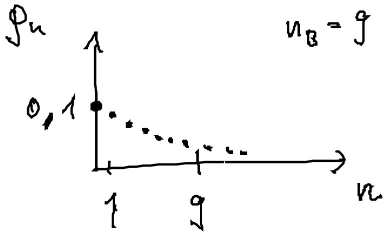
$$\rho_n = \frac{1}{\langle n \rangle + 1} \left(\frac{\langle n \rangle}{\langle n \rangle + 1} \right)^n = \frac{n_B^n}{(n_B+1)^{n+1}} =$$

Wahrscheinlichkeit n-Photon zu finden bei $n_B(T)$

als Funktion d. Mittelwerts $\langle n \rangle = n_B$ ausdrücken

- ρ_n klingt ab mit wachsend n

- $\rho_0 = \frac{n_B^0}{(n_B+1)} = \frac{1}{n_B+1}$ = endlich



(ii) Photonzahl und Schwankg.

Photonzahl $\boxed{\langle n \rangle = n_B}$ (Boseverteilg.)

Schwankg $\Delta n^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$

$$\langle n^2 \rangle = sp\left(c^+c\, c^+c\, \rho_{th}\right) = \sum_n \langle n | c^+c\, c^+c\, \frac{e^{-\beta\hbar\omega c^+c}}{Z} | n \rangle$$

ÜA: $\boxed{\Delta n^2 = \langle n \rangle^2 + \langle n \rangle = n_B^2 + n_B}$

thermisch Licht ist bestimmt durch die T:

- mittlere Photonzahl
- Schwankg: > Fockzustand, Glauberzustand (44.3)
- Mittelwert und Schwankg. sind in derselben Größenordnung.

(iii) Feldmittelwert und Schwankg.

Feld $\langle \vec{E} \rangle = sp(\vec{E} \rho_{th}) = 0$,

gilt $\sum_n \langle n | c^+ e^{-\hbar\omega\beta c^+c} | n \rangle = \sum_n \langle n | \underbrace{c^+ | n \rangle}_{|n+1\rangle} e^{-\hbar\omega\beta n} = 0$

kann klass. verstanden werden (Emission stochastischer Wellenpakete)

Schwankung: $\Delta \vec{E}^2 = \langle \vec{E}^2 \rangle - \underbrace{\langle \vec{E} \rangle^2}_{=0}$ ~ Intensität

ÜA: $$\boxed{\Delta \vec{E}^2 = \frac{g^2}{L^3} \left(2 \frac{n_B}{n_B+1} + 1\right)}$$

- Intensität $\neq 0$

4.4.3. Glauberzustände: kohärente Zustände des klass. ED

klass. ED: $\langle \vec{E} \rangle \neq 0$ gesucht

$|\phi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$ es soll gelten f. geschickte Wahl von c_n: $\langle \phi | \vec{E} | \phi \rangle \neq 0$

z.B.: $\langle \phi | \vec{E} | \phi \rangle \sim \langle \phi | \underline{c} | \phi \rangle$, wenn $\underline{c} |\phi\rangle = \alpha |\phi\rangle$ gilt,

Zahl

So bekommt man ein endliches E-Feld $\sim \alpha$.

die $|\phi\rangle$'s die dieses Eigenwertproblem erfüllen:

$c|\phi\rangle = \alpha |\phi\rangle$ heißen kohärente / Glauberzustände

a) Definition

$$|\phi\rangle \equiv |\alpha\rangle \;, \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\, e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$$

kommt dem Zustand der klass. ED am nächsten

b) zu zeigen ist, daß $|\alpha\rangle$ ein Eigenzustand von c ist:

$$c|\alpha\rangle = c\, e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\, |n\rangle$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\, \sqrt{n}\, |n-1\rangle$$

$n=0$ existiert nicht in Summe $(|-1\rangle)$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{(n-1)!}}\, |n-1\rangle$$

Indexverschiebg. $n \to n-1$

$\alpha^n \alpha$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{n!}}\, |n\rangle$$

$$\boxed{c\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle}$$

α. i.a. ein komplexe Zahl

weil c kein hermitisch Operator

c) Normierg. und Orthogonal

$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$ ist zu zeigen

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n,m} \frac{\alpha^{*n}}{\sqrt{n!}} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \underbrace{\langle n|m\rangle}_{\delta_{nm}}$$

$$= e^{-|\alpha|^2} \sum_n \frac{|\alpha|^{n\cdot 2}}{n!} = e^{-|\alpha|^2} \cdot e^{|\alpha|^2} = 1$$

Die Zustände $\{|\alpha\rangle\}$ sind übervollständig und nicht orthogonal (o.B.). Vorsicht geboten! → Quantenoptik

d) $|\alpha\rangle$ ist <u>kein</u> Eigenzustand von c^+

$$c^+|\alpha\rangle \neq \alpha^*|\alpha\rangle, \text{ aber}$$

$$\langle\alpha|c^+ = \alpha^*\langle\alpha|$$

<u>Charakteristika d. Glauberzustands:</u>

$$c_n = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$$

<u>(i) Photonverteilung</u>

$$p_n = |c_n|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}$$

(ii) Photonzahl und Schwankg.

Photonzahl: $\langle n \rangle = \underbrace{\langle \alpha | c^+}_{\alpha^* \langle \alpha |} \underbrace{c | \alpha \rangle}_{\alpha | \alpha \rangle} = |\alpha|^2 \langle \alpha | \alpha \rangle = |\alpha|^2$

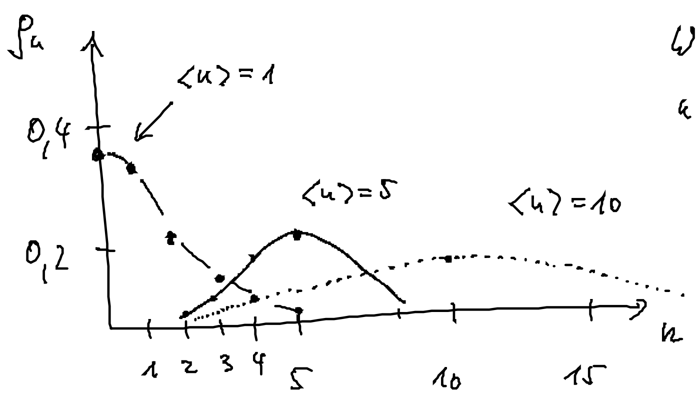
mittlere Zahl d. Photonen im System ist proportional zu $|\alpha|^2$.

Schwankung: $\Delta n = |\alpha|$, $\Delta n^2 = |\alpha|^2$

ÜA

Darstellung der Photonverteilg.

$$\rho_n = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle}$$ Poissonverteilg.



Wahrscheinlichkeit, n-Photonen zu finden mit $\langle n \rangle = |\alpha|^2$

wichtig f. klass. Physik: man braucht nur $\langle n \rangle$ um Ergebnis zu charakterisieren, d.h. mittlere, relative Abweichg. $\rightarrow 0$:

$$\sqrt{\frac{\Delta n^2}{\langle n \rangle^2}} = \frac{1}{\sqrt{\langle n \rangle}} \xrightarrow[\langle n \rangle \to \infty]{} 0$$

für sehr große $\langle n \rangle$ wird:

$$\rho_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle n \rangle}} \, e^{-\frac{(n-\langle n \rangle)^2}{2\langle n \rangle}} \qquad \text{Gaußverteilg.}$$

(iii) Feld und Feldschwankungen

$$\langle \vec{E} \rangle = \langle \alpha | \left(i \frac{g}{L^{3/2}} \vec{e} \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} c(t) + \text{h.a.} \right) | \alpha \rangle$$

$$e^{-i\omega t} c |\alpha\rangle = \alpha e^{-i\omega t} |\alpha\rangle$$

$$\left(c(t) = c \, e^{-i\omega t} \right)$$

$$= i \frac{g}{L^{3/2}} \vec{e} \, \alpha \, e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} + \text{h.a.}$$

$$\text{mit } \alpha = |\alpha| e^{i\theta} \qquad (\text{komplex})$$

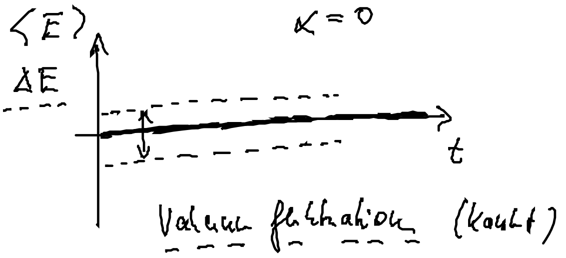
$$\langle \vec{E} \rangle = -\frac{g}{L^{3/2}} 2|\alpha| \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \theta) \, \vec{e} \neq 0$$

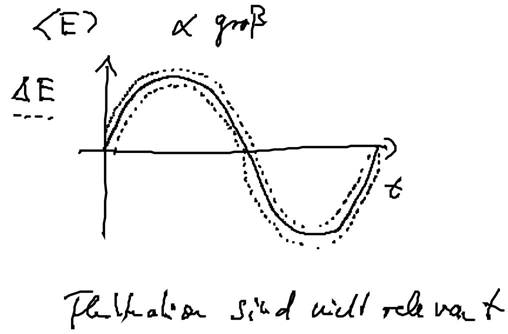
Der Erwartungswert d. Felds ist ungleich Null und stellt eine klassische em. Welle dar.

Schwankungen d. $\vec{E}$-Felds

$$\Delta E^2 = \langle \vec{E}^2 \rangle - \langle \vec{E} \rangle^2 = \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 L^3} = \text{Konstant} \quad \text{ÜA.}$$

$\vec{r} = \text{konst} = 0$





Die Glauberzustände sind Zustände d. klass. Elektrodynamik.

Fluktuation sind von geringer Bedeutung wenn $|\alpha|$ groß gewählt wird

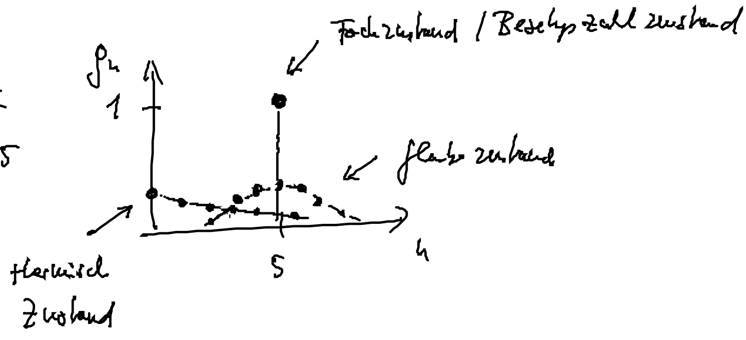
Erzeugg.: klassische Antennen mit klass. Strom z.B. (später)

Laser weit oberhalb der Laserschwelle

4.4.4. Zusammenfassg. zu Zuständen

Verteilg.

$\langle n \rangle = 5$



	$\langle n \rangle$	Δn^2	$\langle \vec{E} \rangle$	ΔE^2
Fock $\|n_0\rangle$	n_0	0	0	

therm.	ρ_{th}	n_B	$n_B + n_B^2$	0
kohärenter	$\|\alpha\rangle$	$\|\alpha\|^2$	$\|\alpha\|^2$	$\sim\|\alpha\|$
			üA	ūA