4. Beispiel zur Zeitordnung

Literatur: R. Feynman Physical Review 84 (1951)

aus Schrödingergleichung Zeitentwicklungsoperator U bekannt:

$$U(t_1,t_2) = T\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2} dt\, H(t)\right) \qquad \text{aus } i\hbar\dot{\Psi} = H(t)\Psi$$

$\nearrow$ stellt Zeitordnung sicher

$$H(t) = H_0 + V(t)$$

H_0: ist lösbar, $V(t)$: Störung

$U(t_1,t_2)$ ableiten mit $V(t)$ als Störung

$$U(t_1,t_2) = T e^{-\frac{i}{\hbar}\int dt\,(H_0+V(t))} = T e^{-\frac{i}{\hbar}\int dt\, H_0}\; e^{-\frac{i}{\hbar}\int dt\, V(t)}$$

$$\approx T e^{-\frac{i}{\hbar}\int dt\, H_0}\left(1-\frac{i}{\hbar}\int dt\, V(t)\right)$$

Aufgabe: Operatoren sind jetzt nach der Zeit zu ordnen

$$= T e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2} dt\, H_0} - \frac{i}{\hbar}\, T e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2} dt'\, H_0(t')} \int_{t_1}^{t_2} dt\, V(t) \,.$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 (t_2-t_1)} - \frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2} dt\, \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}\int_t^{t_2} dt'\, H_0(t')}}_{t'>t}\; V(t)\; \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t} dt'\, H_0(t')}}_{t'<t} \,.$$

V(t) darf nur rechts von $H_0(t')$ stehen, wenn $t < t'$, daher werden die Integralgrenzen aufgespalten und dann zeitgeordnet.

$$= e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 (t_2 - t_1)} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} dt \, e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 (t_2 - t)} V(t) \, e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 (t - t_1)} .$$

5. Modell unabhängiger Bosonen:

Beispiel für eine exakte, nichtstörungstheoretische Lösung

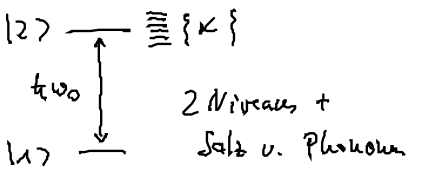
Berechnung der Dipoldichte eines Zweiniveausystems

$$\vec{P} = n_0 \, \vec{d}_{12} \langle a_1^\dagger a_2 \rangle + \text{h.c.}$$

n_0: Anzahldichte (Zahl / Volumen)

$\vec{d}_{12}$: Dipolmoment

$\langle a_1^\dagger a_2 \rangle$: Übergangsamplitude



$$H = H_0 + V$$

$$H_0 = \sum_{e=1}^{2} \hbar \omega_e a_e^\dagger a_e + \sum_\alpha \hbar \omega_\alpha b_\alpha^\dagger b_\alpha$$

$$V = \sum_\alpha \hbar g_\alpha (b_\alpha^\dagger + b_\alpha) a_2^\dagger a_2$$

Interpretation: Im Gegensatz zu Photonen (reale Übergänge) finden hier nur virtuelle Übergänge statt: $b_\alpha, b_\alpha^\dagger$ „wackeln" am Niveau $|2\rangle$

Observable: $\langle a_1^\dagger a_2 \rangle = ?$, mittels Heisenberggleichung:

$$\frac{d}{dt}\, a_1^+ a_2 = -i\omega_0\, a_1^+ a_2 - i \underbrace{\sum_\alpha g_\alpha (b_\alpha^+ + b_\alpha)}_{\phi}\, a_1^+ a_2 \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\, b_\alpha^+ = +i\omega_\alpha\, b_\alpha^+ + i g_\alpha\, a_2^+ a_2 \Rightarrow i\omega_\alpha\, b_\alpha^+ \qquad (2)$$

$$\frac{d}{dt}\, b_\alpha = -i\omega_\alpha\, b_\alpha - i g_\alpha\, a_2^+ a_2 \Rightarrow -i\omega_\alpha\, b_\alpha \qquad (3)$$

$$\frac{d}{dt}\, a_2^+ a_2 = 0 \rightarrow a_2^+ a_2 = \text{Konstante}$$

„........" kann weg transformiert werden durch:

$$b_\alpha^+ \to b_\alpha^+ - \frac{i g_\alpha}{i\omega_\alpha}\, a_2^+ a_2 \quad , \quad b_\alpha \to b_\alpha + \frac{i g_\alpha}{-i\omega_\alpha}\, a_2^+ a_2$$

nach Trafo haben die b_α's nur freie Zeitabhängigkeit → Wicktheorem gültig f. ϕ
$\Longrightarrow$

Trafo in Gl 1 führt uns auf Korrekturen $a_2 a_2$ Proportionalität → 0

haben damit $a_1^+ a_2 = e^{-i\omega_0 t}\, p_{12}$ (Abspaltg. des 1. Terms in (1)):

aus (1): $\dot{p}_{12}(t) = -i\phi(t)\, p_{12}(t)$, Modell heißt Modell unabhängiger Bosonen weil keine Boson-Boson WW

5.1. Analyse der von Neumannreihe

$$\langle p \rangle_{ph} = Sp_{ph}\left(\rho^0_{ph} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int^t dt_1 \int^t dt_2 \cdots \int^t dt_n\, T\phi(t_1)\,\phi(t_2) \cdots \phi(t_n)\right)$$

zunächst Spur über Phonon

es tragen in der Summe nur gerade Potenzen von ϕ auf: $n \to 2n$

$$= sp_{ph}\left(\rho^{0}_{ph} \sum_{n} \frac{(-i)^{2n}}{(2n)!} \int^{t} dt_1 \cdots \int^{t} dt_{2n}\; T\,\phi(t_1)\cdots\phi(t_{2n})\right)$$

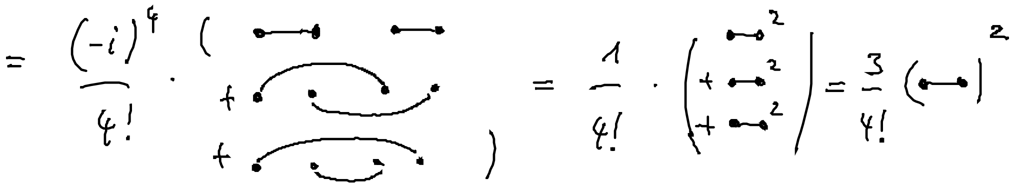
Zeitintegral nicht explizit aufschreiben: mitdenken, $sp(\rho^{0}_{ph} \cdots) = \langle \cdots \rangle$

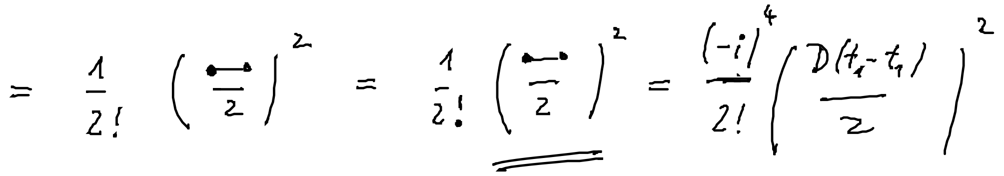
$n=0$: $\quad \underline{\underline{1}}$

$n=1$: $\quad \frac{(-i)^2}{2!} \langle T\,\phi(t_1)\,\phi(t_2)\rangle = -\frac{1}{2} D(t_1-t_2)$ „Baustein" aus letzter VL

$n=2$: $\quad \frac{(-i)^4}{4!} \underbrace{\langle T\,\phi(t_1)\,\phi(t_2)\,\phi(t_3)\,\phi(t_4)\rangle}_{\langle T \;\circ\;\circ\;\circ\;\circ\; \rangle} =$ Wicktheorem

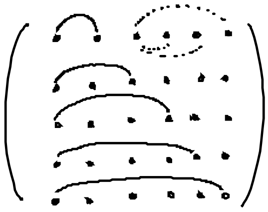
sind paarweise zu binden zum Grundbaustein





$\underline{n=3}$: $$\frac{(-i)^6}{6!}\langle T\,\phi(t_1)\,\phi(t_2)\,\phi(t_3)\,\phi(t_4)\,\phi(t_5)\,\phi(t_6)\rangle$$

$$=\frac{(-i)^6}{3!}\,\frac{1}{4\cdot5\cdot6}$$



$$=\frac{(-i)^6}{3!}\,\frac{15}{4\cdot5\cdot6}\cdot(\bullet\!-\!\bullet)^3$$

6-1 Mgl. den ersten zu binden

6-3 Mgl. den zweiten zu binden

6-5 Mgl. die letzten beiden zu binden

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

5 · 3 · 1 Möglichkeiten

$$=\frac{(-i)^6}{3!}\left(\frac{\bullet\!-\!\bullet}{2}\right)^3$$

$\underline{n\text{-beliebig}}$

$$\frac{(-i)^{2n}}{(2n)!}\langle T\,\phi(t_1)\,\cdots\,\phi(t_{2n})\rangle$$

$$\frac{(-i)^{2n}}{(2n)!}\,(\bullet\!-\!\bullet)^n\,\frac{(2n)!}{n!\,2^n}=\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{\bullet\!-\!\bullet}{2}\right)^n$$

wieviele von denen gibt es ?

$(2n-1)\cdot(2n-3)\,\cdots\,3\cdot1$

analog $n=3$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\frac{(2n)!}{n!\,2^n}}$$

der n-te Term ist: $\frac{1}{n!}\left(-\frac{\bullet\!-\!\circ}{2}\right)^n$: n-te Term einer Exp. Funktion

Die Gesamtlösung ist:

$$\langle a_1^\dagger a_2\rangle = \underbrace{\langle a_1^\dagger a_2\rangle(0)}_{p_0}\, e^{-i\omega_0 t}\, e^{-\frac{1}{2}\int^t dt_1 \int^t dt_2 \underbrace{\langle T\,\phi(t_1)\phi(t_2)\rangle}_{D(t_1-t_2)}}$$

Phononpropagator

Integrale können mit Standardmethoden berechnet werden

5.2. Diskussion:

$$\langle a_1^\dagger a_2\rangle(t) = p_0\, e^{-i\omega_0 t} \exp\left(i\sum_\alpha \frac{g_\alpha^2}{\omega_\alpha} t - \sum_\alpha \frac{g_\alpha^2}{\omega_\alpha^2}\left\{(1+n_\alpha)(1-e^{-i\omega_\alpha t}) + n_\alpha(1-e^{i\omega_\alpha t})\right\}\right)$$

$\sim n_\alpha$ induziert

spontane Prozesse

n_α : Phononbesetzg. – Boseverteilg. $1/(e^{\beta\hbar\omega_\alpha}-1)$

– offensichtlich taucht Frequenzverschiebg. auf:

$$\omega_0 \to \omega_0 - \sum_\alpha \frac{g_\alpha^2}{\omega_\alpha} = \tilde{\omega}_0 :$$ Frequenzverringerg. · Rotverschiebung

– Modifikation der freien Oszillation $e^{-i\tilde{\omega}_0 t - \varphi(t)}$ und

Funktion $\varphi(t)$ → beinhaltet Vielfache der ω_α:

$$e^{e^{i\omega_\alpha t}} \to \sum_n \frac{1}{n!} e^{in\omega_\alpha t}$$

↳ elektronischer Übergang wird „angezogen" (dressed) mit n-Phononprozessen $\Longrightarrow$ neues Quasiteilchen „Polaron"

- Aktivität der Phononen v. T bestimmt über n_α

Hochtemperaturfall $\beta \to 0$, $n_\alpha \approx \frac{1}{1+\beta\hbar\omega_\alpha - 1} = \frac{kT}{\hbar\omega_\alpha} \sim T$

Tieftemperaturfall $\beta \to \infty$, $n_\alpha \to 0$, $\exists$ „1" $\hat{=}$ spontane Phononemission

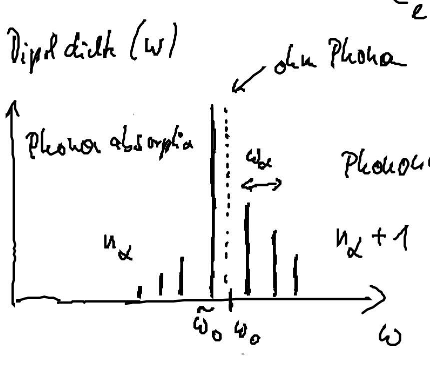
- Bsp 1 Mode α, typisch wie Molekül

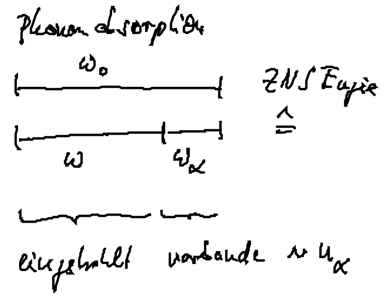
viele Moden: Festkörper (akust. / optisch)

Idee: alle E-Funktionen nach $e^{e^{i\omega_\alpha t}} \dots \sum_n \frac{1}{n!} e^{in\omega_\alpha t}$ umschreiben

$$\langle a_1^+ a_2 \rangle (\omega) = \sum_l c_l \, \delta(\omega - \tilde{\omega}_0 - l\omega_\alpha) \quad \text{f. festes } \alpha$$

c_l: Koeffizient, von T abhängig





~ Lichtabsorption