Clebsch Gordan Koeffizienten:

$$\underline{\underline{|S M_S\rangle}} = \sum_{m_{s_1} m_{s_2}} \underbrace{\langle m_{s_1}, m_{s_2} | S M_S\rangle}_{} \underline{\underline{|m_{s_1}, m_{s_2}\rangle}}$$

C-G-Koeff.: sind gesucht

2 Gleichungen f. deren Bestimmung:

a) $\langle S M_S | \hat{S}^3 | m_{s_1}, m_{s_2}\rangle = \langle S M_S | \hbar M_S | m_{s_1} m_{s_2}\rangle$

b) $\langle S M_S | \hat{\vec{S}}^2 | m_{s_1}, m_{s_2}\rangle = \langle S M_S | \hbar^2 S(S+1) | m_{s_1}, m_{s_2}\rangle$

Bsp: $|0,0\rangle$

a) $\langle 0,0 | \hat{S}^3 | m_{s_1} m_{s_2}\rangle = 0$ wg $M_S = 0$

jetzt nach rechts anwenden: $\hat{S}^3 = \underset{\uparrow}{s_1^3} + \underset{\uparrow}{s_2^3}$

Teilchen 1 und 2

$$\langle 0,0 | \hat{s}_1^3 + \hat{s}_2^3 | m_{s_1} m_{s_2}\rangle = 0$$

$$\hat{S}_i^3 |m_{s_1} m_{s_2}\rangle = \hat{S}_i^3 |\underset{\pm\frac{1}{2}}{\underset{\shortparallel}{m_{s_1}}}\rangle |\underset{\pm\frac{1}{2}}{\underset{\shortparallel}{m_{s_2}}}\rangle = ?$$

(i) $\hat{S}^3_{i=1} \left|\frac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\frac{1}{2}\right\rangle_2 = \underbrace{\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1}_{\text{wirkt nur auf „1"}} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2$

$\Downarrow$

$\left|\pm\frac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\pm\frac{1}{2}\right\rangle_2$

$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2$$

$$\hat{S}^3_2 \left|\frac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\frac{1}{2}\right\rangle_2 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2$$

oben einsetzen:

$$0 = \langle 0,0| \hat{S}^3_1 + \hat{S}^3_2 \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \hbar\, \underbrace{\left\langle 0,0\middle|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle}_{=0 \text{ als C-G-K.}}$$

analoge Rechng. f. $\left|-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$:

$$\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_i = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_i \longrightarrow -\hbar \left\langle 0,0\middle|-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = 0$$

$\Longrightarrow$ 2 C-G-K sind Null, $\langle 0,0|\uparrow\uparrow\rangle = 0 = \langle 0,0|\downarrow\downarrow\rangle$

(ii) aus (a) $\quad 0 = \langle 0,0| \hat{J}^3_1 + \hat{J}^3_2 \left|+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$

$$= \langle 0,0| +\frac{\hbar}{2} - \frac{\hbar}{2} \left|+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = 0$$

Keine Aussage mögl., analog $\left|-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle$

b) $\langle 0,0| \hat{\vec{S}}^2 | m_{s_1} m_{s_2}\rangle = 0$

$$\langle 0,0| \left(\hat{\vec{J}}_1 + \hat{\vec{J}}_2\right)^2 | m_{s_1} m_{s_2}\rangle =$$

$$\langle 0,0 |\, \hat{\vec{s}}_1^{\,2} + \hat{\vec{s}}_2^{\,2} + 2\, \hat{\vec{s}}_1 \cdot \hat{\vec{s}}_2 \,| m_{s_1} m_{s_2} \rangle =$$

$$\hbar^2 s_1(s_1+1), \quad s_1 = \tfrac{1}{2} \qquad\qquad \hbar^2 s_2(s_2+1), \quad s_2 = \tfrac{1}{2}$$

$$\langle 0,0 |\, \tfrac{3}{4}\hbar^2 + \tfrac{3}{4}\hbar^2 + 2\, \hat{\vec{s}}_1 \cdot \hat{\vec{s}}_2 \,| m_{s_1} m_{s_2} \rangle =$$

$$\tfrac{3}{2}\hbar^2 \langle 0,0 | m_{s_1} m_{s_2} \rangle + 2 \underbrace{\langle 0,0 |\, \hat{\vec{s}}_1 \cdot \hat{\vec{s}}_2 \,| m_{s_1} m_{s_2} \rangle}_{} =$$

$$2 \langle 0,0 |\, \underbrace{\hat{s}^1_1 \hat{s}^1_2 + \hat{s}^2_1 \hat{s}^2_2}_{\text{Eigenwertproblem nicht bekannt}} + \underbrace{\hat{s}^3_1 s^3_2 \,| m_{s_1} m_{s_2} \rangle}_{\hbar m_{s_1} \cdot \hbar m_{s_2} | m_{s_1} m_{s_2} \rangle}$$

brauche gleichg. f. $|\uparrow\downarrow\rangle = |\underset{m_{s_1}}{+\tfrac{1}{2}}, \underset{m_{s_2}}{-\tfrac{1}{2}}\rangle$

$$\rightarrow \quad \hat{s}^1_1 \hat{s}^1_2 \,|+\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{\hbar^2}{4} |-\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_1 \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2$$

$$\hat{s}^2_1 \hat{s}^2_2 \,|+\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{\hbar^2}{4} |-\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$\leadsto \langle 0,0| 2\,\hat{\vec{s}}_1\cdot\hat{\vec{s}}_2 |\uparrow\downarrow\rangle = 2\,\langle 0,0| \frac{\hbar^2}{4}+\frac{\hbar^2}{4} |\downarrow\uparrow\rangle$$
$$+\, 2\,\langle 0,0| -\frac{\hbar^2}{4} |\uparrow\downarrow\rangle$$

$$\leadsto$$
$$0 \overset{!}{=} \langle 0,0 | \hat{\vec{s}}_1^{\,2} + \hat{\vec{s}}_2^{\,2} + 2\,\hat{\vec{s}}_1\cdot\hat{\vec{s}}_2 |\uparrow\downarrow\rangle$$

$$0 = \hbar^2 \langle 00|\downarrow\uparrow\rangle + \hbar^2\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)^2 \langle 00|\uparrow\downarrow\rangle$$

$$\langle 00|\downarrow\uparrow\rangle \underline{\underline{=-}} \langle 00|\uparrow\downarrow\rangle$$

f. antiparallele Spin ist Vorzeichen verschieden

weg. Normierg.

$$\leadsto |0,0\rangle = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}\, |\uparrow\downarrow\rangle \underline{\underline{-}} \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}\, |\downarrow\uparrow\rangle$$

C-G-Darstellg. von $|0,0\rangle$

alle andere analog.

3.5. Zusammenfassung zu Vielteilchenzuständen

Start: Moden des Paulifelds / Schrödingerfeld

$$\underline{\vec{\Psi}}_{Pauli} = \sum_\lambda \underbrace{\vec{\varphi}_\lambda(\vec{r},\vec{s})}_{} \,\underline{a}_\lambda(t)$$

Eigenfkt. von $H_0^{(1)}$
sind 2er Spinoren

aus Pauli-gleichung: $\vec{\psi}(\vec{r},\vec{s}) = \sum\limits_{m_s=\pm\frac{1}{2}} \vec{\chi}_{m_s}(\vec{s})\,\underbrace{\psi^{m_s}(\vec{r})}_{\text{Spinkomponente}}$ QM I

$$= \sum_{m_s} \vec{\chi}_{m_s}(\vec{s}) \sum_n c_n^{m_s}\varphi_n^{m_s}(\vec{r})$$

Entwicklung in Eigenfunktionssystem eines $H_0^{(1)}$ der vom Ort abhängt

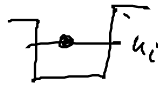
$$= \sum_{n,m_s} c_n^{m_s}\,\underbrace{\vec{\chi}_{m_s}(\vec{s})\,\varphi_n^{m_s}(\vec{r})}_{\text{Entwicklungsbasis f. Operatoren}}$$

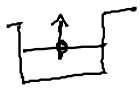
$$\vec{\varphi}_\lambda = \vec{\varphi}_{nm_s}$$

andere Darstellung: $\equiv \vec{\chi}_s\,\varphi_n^s \qquad (s \equiv m_s)$

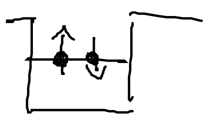
f. viele Teilchen: $\equiv \vec{\chi}_{s_i}(s_i)\,\varphi_{n_i}^{s_i}(\vec{r}_i) \equiv \varphi_{n_i}^{s_i}(\vec{r}_i)$

(viele Bücher verändern die Notation) $= \varphi_i(i)$ „Spin-Bahn Orbital"

i-tes Teilchen im Zustand n_i  n_i

mit dem Spin $s_i = \pm\frac{1}{2}$ 

wenn der Ortszustand nicht vom Spin abhängt

 dann: $\varphi_n^s(\vec{r}) = \varphi_n(\vec{r})$

↳ Konstruktion f. Fermionen / Bosonen

Fermion: Slaterdeterminante:

$$\phi_F(1 \cdots i, \cdots N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_1(2) & \cdots & \varphi_1(N) \\ \varphi_2(1) & \varphi_2(2) & \cdots & \\ & \cdots & & \\ \varphi_N(1) & \cdots & & \varphi_N(N) \end{vmatrix}$$

N-Teilchen

antisymmetrisch: Antisymmetrie, Pauliprinzip

Bosonen:

$$\phi_B(1 \cdots i, \cdots N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \frac{1}{\sqrt{\prod_i^K N_i!}} \sum_{\substack{\text{alle} \\ \text{Permutation} \\ \text{der Quantenzahlen}}} P\{\varphi_1(1) \cdots \varphi_i(i) \cdots \varphi_N(N)\}$$

Teilchenzahl normierung

Normierg. falls Teilchen in demselben Zustand sind: sind in ϕ z. $K < N$ verschiedene Orbitale besetzt, so ist N_i die Teilchenzahl im i-ten Orbital

Bsp. 2 Teilchen: $\phi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \text{Korrelation} \cdot \left(\varphi_1(1)\varphi_2(2) \pm \varphi_2(1)\varphi_1(2)\right)$

Keine Korrelation

Fermion

Permutation

2 Teilchen in dasselbe Orbital: $1 = 2$

$$\phi_F = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_1(1)\varphi_1(2) - \varphi_1(1)\varphi_1(2)\right)$$

$$= 0$$

$$\phi_B = \frac{1}{\sqrt{2}}\underset{\substack{\uparrow \\ \text{2 Teilch.} \\ \text{in Orbital 1}}}{\frac{1}{\sqrt{2!}}}\Big(\underbrace{\varphi_1(1)\,\varphi_1(2) + \varphi_1(1)\varphi_1(2)}_{2\varphi_1(1)\,\varphi_1(2)}\Big)$$

$$= \varphi_1(1)\,\varphi_1(2) \neq 0$$

4. Quantisierung d. Maxwellfeld

4.1. Feldquantisierung über Lagrangedichte

a) Lagrangedichte „raten" und dann bestätigen

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\varepsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r},t)}_{\text{el. Feld}} - \underbrace{\frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2(\vec{r},t)}_{\text{magn. Feld}}\Big) \qquad \begin{aligned} H &= T+V \\ L &= T-V \end{aligned}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A} \quad , \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

ohne Quellen im freien Raum $\phi = 0$

Feldvariablen: $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) \Rightarrow \vec{E}, \vec{B}$ bestimmbar

Lagrangegleichg. f. x-Komponente von $\vec{A}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_x} - \sum_u \underset{\substack{\nearrow \\ \partial_{x_u}}}{\partial_u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_u A_x)} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_x} = 0$$

$\shortparallel$

$$0 \quad + \frac{1}{\mu_0 2} \sum_u \partial_u \underbrace{2 \sum_e (\vec{\nabla} \times \vec{A})_e}_{\substack{\text{äußere Ableitg} \\ \vec{B}^2}} \cdot \partial_{A_{x|u}} \underbrace{(\varepsilon_{ejk} \partial_j A_k)}_{B_e = (\text{rot } A)_e} - \varepsilon_0 \dot{A}_x = 0$$

$$j = u$$
$$k = x$$

$$\frac{1}{\mu_0} \sum_{u,e} \partial_u B_e \, \varepsilon_{eux} + \varepsilon_0 \partial_t E_x = 0$$

$$\varepsilon_{xeu} = - \varepsilon_{xue}$$

$$\underbrace{- \frac{1}{\mu_0} \sum_{ue} \varepsilon_{xue} \partial_u B_e}$$

$$- \frac{1}{\mu_0} (\text{rot } B)_x + \varepsilon_0 \partial_t E_x = 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E} \qquad \checkmark$$

damit ist $\mathcal{L}$ bestätigt.

b) Impuls Π_{A_i} festlegen:

$$\Pi_{A_x} = \partial_{\dot{A}_x} \mathcal{L} = \sum_i \frac{\varepsilon_0}{2} (\dot{A}_i)^2 = \varepsilon_0 \dot{A}_x = -\varepsilon_0 E_x$$

$\rightarrow$ kanonisch Variablenpaar ist A_x, E_x. bzw $\vec{A}$ und $\vec{E}$.

c, d) Operatoren einführen, Vertauschungsrelation definieren

$$\Big[\underline{A}_{l}(\vec{r},t),\ \underline{E}_{m}(\vec{r}',t)\Big]_{-} = \underbrace{\frac{i\hbar}{\varepsilon_0}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta_{lm}}_{\text{muß leicht korrigiert werden}}$$ noch falsch!

x, y, z

Bosonen

im Moment wird die Bedingg $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ im Vakuum nicht eingehalten, Vertauschungsrelation verletzt diese Relation

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta_{lm} \;\rightarrow\; F_{lm}(\vec{r}-\vec{r}') = \underbrace{\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta_{lm} - \frac{1}{4\pi}\,\partial_l\,\partial_m \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}$$

„transversale Deltafunktion": $\delta_T(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta_{lm}$

Beweis am Ende von Abschnitt 4.1.

e) Hamiltondichte / Operator

$$\mathcal{H} = -\dot{\vec{A}}\cdot\vec{E}\,\varepsilon_0 - \mathcal{L} = \varepsilon_0\,\vec{E}^2 - \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2$$

$$\rightarrow \quad \underline{H} = \int d^3r \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\,\underline{\vec{E}}(\vec{r},t)^2 + \frac{1}{2\mu_0}\,\underline{\vec{B}}(\vec{r},t)^2\right)$$

f) Bewegungsgleichungen f. $\vec{A}$:

Heisenbergbewegungsgleichungen aufstellen $\rightarrow \underline{\vec{A}}(\vec{r},t) \rightarrow$ Erwartungswerte

$\Box \vec{\underline{A}} = 0$ (ohne Beweis) analog $\underline{\Psi}^+(\vec{r},t)$: Schrödingergl.

g) Entwicklung nach Feldmoden:

$$\vec{\underline{A}}(\vec{r},t) = \sum_n \vec{u}_n(\vec{r})\, \underline{c}_n(t) + \underbrace{h.a.}_{\text{weil Feld reell}}$$

Bose operatoren: $[c_n, c_{n'}^+]_- = \delta_{nn'}$

vollständiges Funktionensystem $\{\vec{u}_n(\vec{r})\}$

analog zur stationären Schrödingergl. verwendet man die Gleichg. $\Box \vec{A} = 0$ mit stationärem Ansatz $\vec{A} = \vec{u}(\vec{r})e^{-i\omega t}$

$\rightarrow$ Helmholtzgleichg.: $\Delta \vec{u}(\vec{r}) = \frac{\omega^2}{c^2}\vec{u}(\vec{r})$

Eigenwertproblem mit $\omega_n, \vec{u}_n$

Quantenzahlen