3.) Quantisierung d. Schrödingerfelds $\vec{\psi}(\vec{r},t)$ (Paulispinor)

3.1. Zusammenfassung bisheriger Ergebnisse

Paulispinor $\vec{\psi}(\vec{r},\vec{s},t)$, Schrödingerfeld $\psi(\vec{r},t)$ $\Rightarrow \psi(x,t)$

„x“ $\rightarrow$ „$\vec{r},\vec{s}$“

$\boxed{\text{Quantisierg.}}$: (Feld / Impuls)

$$[\psi(x,t),\ \psi^+(x',t)]_{\pm} = \underbrace{\delta(x-x')}_{\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta_{ss'}}$$

1. Kommutator

gleichzeitig! ↑ Fermion

Boson: auch in Übereinstimmung mit Exp.

$$[\psi^{(+)}(x,t),\ \psi^{(+)}(x',t)]_{\pm} = 0$$

$$H_0 = \sum_s \int d^3r\ \psi^+(x,t)\ \underbrace{H_0^{(1)}(x,p)}_{\text{Einteilchen } H \text{ aus Schrödingergleichung}}\ \psi(x,t)$$

2. Hamiltonian

↗ nicht-WW

$$\dot{\psi} = \frac{i}{\hbar}[H_0,\ \psi(x,t)]$$

3. Heisenberggleichg.

$\boxed{\text{Modenentwicklg.}}$

$$H_0^{(1)}(x,p) = \hat{1}\,\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta + \hat{u}(\vec{r},\vec{s},\vec{p})$$

$$H_0^{(1)}\ \vec{\varphi}_\lambda(\vec{r},\vec{s}) = \varepsilon_\lambda\ \vec{\varphi}_\lambda(\vec{r},\vec{s})$$

4. Eigenwertproblem d. 1Teilchen $H_0^{(1)}$ in (1) Quantisierg.

$$\vec{\psi} = \sum_\lambda a_\lambda(t)\ \vec{\varphi}_\lambda(\vec{r},\vec{s}) \quad , \quad \omega_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{\hbar}$$

↗ Modenoperator

5. Modenentwicklg.

$$H_0 = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda\, a_\lambda^+ a_\lambda \quad , \quad [a_\lambda(t),\ a_{\lambda'}^+(t)]_{\pm} = \delta_{\lambda\lambda'}$$

$$\dot{a}_\lambda = \frac{i}{\hbar}[H_0, a_\lambda] = -i\omega_\lambda a_\lambda$$

$\boxed{\text{Observable}}$ $\quad \underline{O} = \frac{\partial H}{\partial \phi_{ext}} \overset{\text{z.B.}}{=} \frac{\partial}{\partial \phi_{ext}} \left\{ \psi^+(\vec{r},t)\, q\, \phi_{ext}(\vec{r},t)\, \psi(\vec{r},t) \right\} = \underbrace{q\, \psi^+ \psi}_{\text{El-Dichte}}$

Oberable: Ladungsdichte, Strom

angelegtes Feld

durch Ableitung nach Maxwellfeldern (ϕ, A, E, B) werden die

Quelle $(\rho, j, P_{dipol}, M_{magn.})$ definiert $\hat{=}$ Observablen

$\boxed{\text{Erwartungswerte}}$ $\quad \langle\psi | \underline{O} | \psi\rangle = F$ (muß über a_λ^+, a_λ berechnet werden)

Zustand $|\psi\rangle$ als nächstes gesucht, $\langle\psi|\psi\rangle$

3.2 Eigenwertproblem und Interpretation

3.2.1. Eine Feldmode

Fermion, Boson i.a.: $H_0 = \sum_\lambda \underbrace{\hbar\omega_\lambda}_{\varepsilon_\lambda} a_\lambda^+ a_\lambda = \sum_\lambda H_\lambda$

$H_\lambda |n_\lambda\rangle = a_\lambda^+ a_\lambda |n_\lambda\rangle$: Eigenwertproblem d. Moden-H: H_λ

$\hookrightarrow a_\lambda^+ a_\lambda |n_\lambda\rangle = n_\lambda |n_\lambda\rangle$

Vertauschungsrelationen $[a_\lambda, a_{\lambda'}^+] = \delta_{\lambda\lambda'}$

Besetzungszahloperator eine Mode: $a_\lambda^+ a_\lambda \equiv \underline{n}_\lambda$

Besetzungszahl: $n_\lambda = \langle n_\lambda | a_\lambda^+ a_\lambda | n_\lambda\rangle = \langle n_\lambda | \underline{n}_\lambda | n_\lambda\rangle$

$\rightarrow$ „es gibt n_λ - Teilchen in der Mode λ"

$\rightarrow$ man begibt sich damit sofort in Sprache der Vielteilchentheorie

Fermionen: Plus quantisierg. $a_\lambda a_{\lambda'}^+ + a_{\lambda'}^+ a_\lambda = \delta_{\lambda\lambda'}$

$a_\lambda a_\lambda + a_\lambda a_\lambda = 0 \rightarrow \underbrace{a_\lambda a_\lambda}_{0} = -a_\lambda a_\lambda$

a) einzige mögl. Werte für n_λ sind: 0 und 1

Beweis: betrachte: $a_\lambda^+ \underbrace{a_\lambda a_\lambda^+}\, a_\lambda = a_\lambda^+ (1 - a_\lambda^+ a_\lambda) a_\lambda$

$$= a_\lambda^+ a_\lambda - \underbrace{a_\lambda^+ a_\lambda^+ a_\lambda a_\lambda}_{0} = a_\lambda^+ a_\lambda$$

$$\rightarrow \underline{n}_\lambda^2 = \underline{n}_\lambda \rightarrow \underline{n}_\lambda^2 |n_\lambda\rangle = \underline{n}_\lambda |n_\lambda\rangle$$

$$n_\lambda^2 |n_\lambda\rangle = n_\lambda |n_\lambda\rangle$$

$$\rightarrow n_\lambda^2 = n_\lambda \Rightarrow \underline{n_\lambda = 0, 1}$$

„Pauliprinzip"
(Besetzg. mit 1 Fermion
oder Nichtbesetzg.)

b) Wellenfunktionen zu $n_\lambda = 0, 1$ werden als $|n_\lambda = 0, 1\rangle$ geschrieben und sind mit $|1\rangle = a_\lambda^+ |0\rangle$ und $|0\rangle$ gegeben

Beweis: $n_\lambda = 0$ sei der unbesetzte Zustand (Vakuum) mit $|0\rangle$ geg. definiert durch $a_\lambda |0\rangle = 0$

betrachte: $\underline{n}_\lambda a_\lambda^+ |0\rangle = a_\lambda^+ a_\lambda a_\lambda^+ |0\rangle$

Normalordnung oft günstig:
alle Vernichter a_λ nach rechts

$$= a_\lambda^+ (1 - a_\lambda^+ a_\lambda) |0\rangle = a_\lambda^+ |0\rangle = \underbrace{1 \cdot a_\lambda^+ |0\rangle}_{|1\rangle}$$

$$\rightarrow a_\lambda^+ |0\rangle = |1\rangle \quad ✓$$

c/ Operatorwirkg.

$$a_\lambda^+ |1\rangle = a_\lambda^+ a_\lambda^+ |0\rangle = - a_\lambda^+ a_\lambda^+ |0\rangle = 0$$

$$a_\lambda |1\rangle = a_\lambda a_\lambda^+ |0\rangle = (1 - a_\lambda^+ a_\lambda) |0\rangle = |0\rangle$$

$$a_\lambda^+ |0\rangle = |1\rangle$$

$$a_\lambda |0\rangle = 0$$

Bosonen Kommutator-Quantisierg. $a_\lambda a_{\lambda'}^+ - a_{\lambda'}^+ a_\lambda = \delta_{\lambda\lambda'}$

QM I $\quad a_\lambda^{(+)} a_{\lambda'}^{(+)} - a_\lambda^{(+)} a_{\lambda'}^{(+)} = 0$

a/ $n_\lambda = 0, 1, 2 \ldots$

b/ $|0\rangle, \; |n_\lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_\lambda !}} (a_\lambda^+)^{n_\lambda} |0\rangle$

c/ $a_\lambda^+ |n_\lambda\rangle = (n_\lambda + 1)^{1/2} |n_\lambda + 1\rangle$

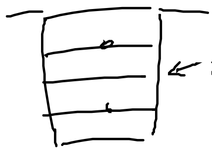
$a_\lambda |n\rangle = n_\lambda^{1/2} \; |n_\lambda - 1\rangle$

$a_\lambda |0\rangle = 0$

3.2.2. Vielmodenzustände

Bsp. Schrödingerfeld in Kasten

H_λ gelöst:



$\leftarrow \varepsilon_\lambda \rightarrow \quad H_\lambda |n_\lambda\rangle = \varepsilon_\lambda |n_\lambda\rangle$ ✓

Gesamtproblem: $H_0 = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda a_\lambda^+ a_\lambda \quad : \quad H_0 |\psi\rangle = E |\psi\rangle$

da H_0 eine Summe ungekoppelter Teilsysteme ist.
So ist die Lösg. des Gesamtproblems durch die Summe aller Teilenergie und durch die Produktwellenfkt. der Teilsystem gegeben.

$$E = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda n_\lambda \quad , \quad |\psi\rangle = \prod_\lambda |n_\lambda\rangle = |n_1, n_2 \cdots \rangle$$

Zustände sind durch Angabe der Besetzungszahl der Moden gegeben,
gilt f. quantisiert Feld als auch quantisierte Felder. $\hat{=}$ einheitliche Sprache

Allgemeinste Zustand ist Superposition aller mögl. Produktzustände

$$|\psi\rangle = \sum_{\{n_\lambda\}} C_{n_1 n_2 n_3 \cdots} \quad |n_1, n_2, n_3 \cdots \rangle$$

$$= \sum_{\{n_\lambda\}} C_{n_1 n_2 n_3 \cdots} \prod_\lambda \frac{a^{+\, n_\lambda}}{(n_\lambda!)^{1/2}} |0_\lambda\rangle$$

Übergänge zwischen Zuständen:

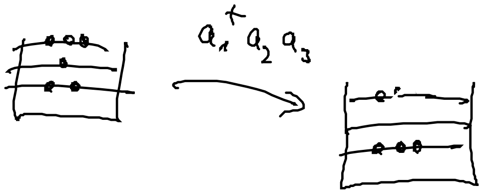
$$a_\lambda^\dagger \, |n_1 n_2 \dots n_\lambda \dots\rangle = \begin{cases} \sqrt{n_\lambda+1} \\ (-1)^m \sqrt{1-n_\lambda} \end{cases} |n_1 n_2 \dots \begin{matrix} n_\lambda+1 \\ 1-n_\lambda \end{matrix} \dots\rangle \quad \begin{matrix} B \\ F \end{matrix}$$

$$m = \sum_{i=1}^{\lambda-1} n_i$$

$$a_\lambda \, |n_1 n_2 \dots n_\lambda \dots\rangle = \begin{cases} \sqrt{n_\lambda} \\ (-1)^m \sqrt{n_\lambda} \end{cases} |n_1 n_2 \dots \begin{matrix} n_\lambda-1 \\ n_\lambda-1 \text{ f. } n_\lambda=1 \\ \text{bzw} \\ 0 \text{ f. } n_\lambda = 0 \end{matrix} \dots\rangle \quad \begin{matrix} B \\ F \end{matrix}$$

3.3 Interpretation

Fockraum: Gesamtheit der Räume verschiedener Anregungszahlen



Erzeuger und Vernichter verbinden diese Räume

- Jedes Teilchen / Feld wird über Anregungszahlen / Anzahl der Quanten in Moden beschrieben: „λ-te" Mode hat n_λ Quanten
- über die Def. des Zustands kann damit ein Vielteilchentheorie beschrieben werden (nächster Abschnitt: welcher Zustand beschreibt wieviel Teilchen)
- Zeitabhängigkeit: $a_\lambda^{(+)}(t) = a_\lambda^{(+)} e^{\pm i \omega_\lambda t}$,

d.h. an stationäre $|\Psi\rangle$ von oben ergibt sich zeitabhängiger Zustand mit $a_\lambda^{(+)} \rightarrow a_\lambda^{(+)}(t)$.

- Zustand: $\sum_{\{n_\lambda\}} c(\{n_\lambda\}) \prod_\lambda \frac{a_\lambda^{+\,n_\lambda}(t)}{\sqrt{n_\lambda!}} |0_\lambda\rangle$

mit $\Psi^+(\vec{r},t) = \sum_\lambda \varphi_\lambda^*(\vec{r})\, a_\lambda^+(t) \quad \Big| \cdot \varphi_\mu(\vec{r}),\ \int d^3r,\ \sum_\mu$

Umkehrung: $a_\lambda^+(t) = \int d^3r\, \varphi_\lambda(\vec{r})\, \Psi^+(\vec{r},t)$

$$|\Psi\rangle = \sum_{\{n_\lambda\}} c(\{n_\lambda\}) \prod_\lambda \frac{1}{\sqrt{n_\lambda!}} \left[\int d^3r\, \varphi_\lambda(\vec{r})\, \Psi^+(\vec{r},t)\right]^{n_\lambda} |0_\lambda\rangle$$

offensichtlich wirkt $\Psi^+(r,t)$ auf den Vakuumzustand mit Potenz n_λ

$\Psi^+(\vec{r},t)$ erzeugt ein Teilchen am Ort $\vec{r}$ zur Zeit t

„Heisenberg vernichter / erzeuger."