4.2. Modenentwicklung im freien Raum

Moden $\vec{u}_n$ spezialisieren auf ebene Wellen als eine bequeme Wahl:

$$\vec{u}_n \to \vec{\xi}_{\lambda k} = \frac{1}{\sqrt{V}}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, \vec{e}_{\lambda k}$$

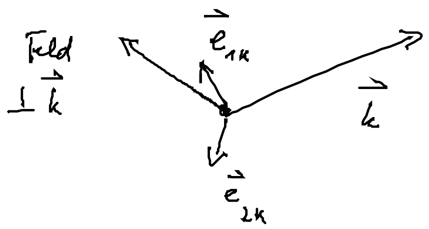
$V = L^3$ Normierung der ebenen Welle

$$\omega_n \to \omega_k = c\,|\vec{k}|$$

$\hat{=}$ vollständigen System v. ebenen Wellen:

$\vec{e}_{\lambda k}$: Polarisationsvektoren f. festes $\vec{k}$, spannen $\perp$ zu $\vec{k}$ Ebene auf

$\lambda = 1,2 \to$ Ebene



$$\underline{\vec{A}}(\vec{r},t) = \sum_{\lambda,k} f_k\, \vec{e}_{\lambda k}\, \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{L^{3/2}}\, \underline{c}_{\lambda k}(t) + h.a.$$

Dimension und Normierung auf harmonische Oszillator $c_{\lambda k}(t)$

$$f_k = \text{gewählt} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\,\omega(\vec{k})}} \to \text{Konsistenz gezeigt}$$

Beobachtbare Größen:

$$\underline{\vec{E}} = -\partial_t \underline{\vec{A}} = -\sum_{\lambda k} f_k \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{L^{3/2}} \vec{e}_{\lambda k} \dot{\underline{c}}_{\lambda k}(t) + h.a.$$

mit $\dot{\underline{c}}_{\lambda k}(t) = \pm i \underbrace{\omega(|\vec{k}|)}_{\omega_k} \underline{c}^{(+)}_{\lambda k}(t)$ aus Heisenberg Bgl. (ÜA)

$$\underline{\vec{E}} = \sum_{\lambda k} i g_k \vec{e}_{\lambda k} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{L^{3/2}} \underline{c}_{\lambda k}(t) + h.a.$$

$$g_k = \left(\frac{\hbar \omega_k}{2\varepsilon_0}\right)^{1/2}$$

$$\underline{\vec{B}} = \vec{\nabla} \times \underline{\vec{A}} = \sum_{\lambda k} i\vec{k} \times \vec{e}_{\lambda k} f_k \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{L^{3/2}} \underline{c}_{\lambda k}(t) + h.a.$$

H in Modendarstellg.: einsetzen von $\vec{E}$ und $\vec{B}$: ÜA

$$\underline{H} = \frac{1}{2} \int d^3r \left(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2\right) = \sum_{\lambda k} \hbar\omega_k \left(c^+_{\lambda k}(t) c_{\lambda k}(t) + \frac{1}{2}\right)$$

ebenso: $[c_{\lambda k}, c^+_{\lambda' k'}]_- = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{kk'}$ („k" → „$\vec{k}$")

Bemerkungen:

a) Maxwellfeld im freien Raum kann über harmonische Oszillatoren beschrieben werden, „−"-Quantisierung: Bosonen

b) Quantenzahlen: $\vec{k}, \lambda$

c) Zustände ergeben sich im Heisenbergbild $\underline{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$ als Eigenwertproblem und andere Zustände durch Überlagerung aufbauen

Eigenzustände sind Besetzungszahlzustände mit:

$$c^{+}_{\lambda k} c_{\lambda k} |n_{\lambda k}\rangle = n_{\lambda k} |n_{\lambda k}\rangle$$

$$n_{\lambda k} \hat{=} \{0, 1, 2, 3 \cdots\}$$

Sprechweise: Im Zustand $|n_{\lambda k}\rangle$ befinden sich $n_{\lambda k}$ Photonen (Anregungen d. Quantenfelds) in der Mode λk.

d) Vakuumzustandsenergie:

$n_{\lambda k} = 0$ (keine Photonen)

$$\langle H \rangle_{Vaku} = \sum_{\lambda k} \frac{1}{2} \hbar \omega_k \to \infty$$

unproblematisch weil beim Vertauschen und Berechnen v. Observablen keine Rolle, wenn aber Materie im Spiel ist so durchaus nachweisbar im Rahmen d. Energie-Zeitunschärfe e/ Folge der Quantisierung:

(i) Spontane Emission kann nur qm. erklärt werden

(ii) Lamb shift: $2s_{1/2}$ und $2p_{1/2}$ → Aufspaltg. d. Energiefluktuation im Vakuum

4.3. Feldzustände und Feld / Photonzahl als charakteristische Größe

sinnvolle Erwartungswerte:

$$\langle \vec{E} \rangle, \quad I \sim \underbrace{\langle E^- E^+ \rangle}, \quad \langle n \rangle = \langle c^+_{\lambda k} c_{\lambda k} \rangle$$

Feld — Intensität — Photostrom — Photonzahl in Mode λk

und die jeweiligen Schwankungen (QM als statistische Theorie)

$$\vec{E} = \underbrace{i \sum_{\lambda k} g_k \underbrace{\vec{e}_{\lambda k}\, \xi_k}_{\vec{\xi}_{\lambda k}}\, c_{\lambda k}(t)}_{E^+} + \underbrace{h.a.}_{E^-},$$

$$I(\vec{r},t) = 2\varepsilon_0 c \langle \vec{E}^- \cdot \vec{E}^+ \rangle$$

$$= 2\varepsilon_0 c \sum_{\lambda k} \sum_{\lambda' k'} g^*_k g_{k'}\, \vec{e}^{\,*}_{k\lambda} \cdot \vec{e}_{k'\lambda'}\, \xi^*_k(\vec{r})\, \xi_{k'}(\vec{r})\, \langle c^+_{\lambda k}(t)\, c_{\lambda' k'}(t) \rangle$$

räumlich gemittelte Intensität:

$$\overline{I} = \underline{\underline{\frac{1}{V}\int d^3r}}\; 2\varepsilon_0 c \langle \vec{E}^- \cdot \vec{E}^+ \rangle$$

enthält: $\frac{1}{V}\int d^3r \; \underbrace{\frac{1}{V} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}}} = \frac{1}{V}\overbrace{\frac{(2\pi)^3}{V}\delta(\vec{k}-\vec{k}')}^{\delta_{kk'}}$

$\hookrightarrow \vec{e}_{\lambda k} \cdot \vec{e}_{\lambda' k} = \delta_{\lambda\lambda'}$

$$\overline{I} = 2\varepsilon_0 c \frac{1}{V}\sum_{\lambda k} |g_k|^2 \langle \underbrace{c^+_{\lambda k} c_{\lambda k}}_{\text{Photonzahl } n_{\lambda k}} \rangle$$

$$\boxed{\overline{I} = \frac{c}{V}\sum_{\lambda k} \hbar\omega_k \, n_{\lambda k}}$$

Intensität gegeben durch Zahl d. Photonen $n_{\lambda k}$ mit Energie $\omega_k \hbar$.

4.4. Wichtige Zustände d. Maxwellfeldes (Strahlungsfelds)

diskutiere nur 1 Mode $c_{\lambda k} \to c$, $n_{\lambda k} \to n$

mit Eigenzustände $c^+c|n\rangle = n|n\rangle$ bekannt: $|n\rangle = |n\rangle(c^+)$

alle andere Zustände: $|\psi\rangle = \sum_n z_n |n\rangle$
(beliebige Zustände)

$\uparrow$ Zahlen: Entwicklungskoeffizient = konstante (komplex)

a) Charakterisierg. d. Zustände

(i) Photonenverteilung $|z_n|^2$:

beschreibt die Wahrscheinlichkeit bei Messg. n Photonen zu finden im Zustand $|\psi\rangle$

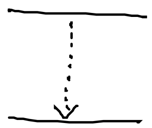
(ii) Photonzahl: $n = \langle\psi|c^+c|\psi\rangle$

Schwankung: $\Delta n = \sqrt{\langle(c^+c - \langle c^+c\rangle)^2\rangle} = \sqrt{\langle(c^+c)^2\rangle - \langle c^+c\rangle^2}$

(iii) Feld: $\langle\vec{E}\rangle = \langle\psi|\vec{E}|\psi\rangle$

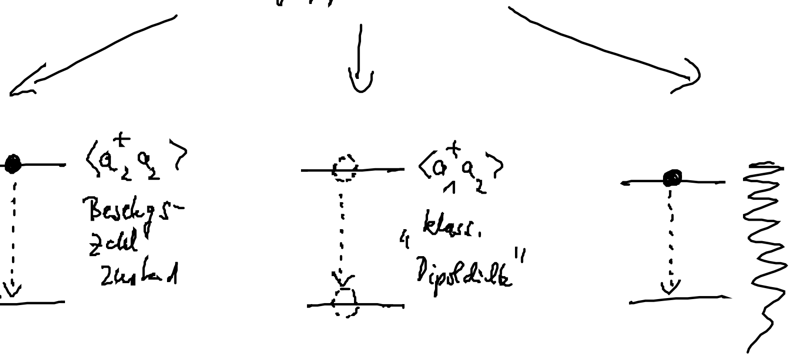
Schwankung: $\Delta E = \sqrt{\langle \vec{\underline{E}}^2\rangle - \langle\vec{\underline{E}}\rangle^2}$

b) Denkbare Zustände

$a_2^+|0\rangle$  $|2\rangle$ einfachstes elektron. Niveauschema

$a_1^+|0\rangle$ $|1\rangle$

Ausgangspkt. 1 Elektron



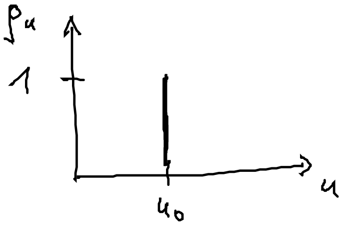
Photonzahl-Zustand $\|n\rangle$	kohärenter Zustand $\|\alpha\rangle$	thermische Zustände
$\langle\vec{E}\rangle = 0$	$\langle\vec{E}\rangle \neq 0$	$\langle\vec{E}\rangle = 0$
$I \neq 0$	$I \neq 0$	$I \neq 0$
4.4.1	4.4.3	4.4.2

44.1. Photonzahlzustand (Fockzustand) $|n_0\rangle$

$$c^\dagger c\,|n_0\rangle = n_0\,|n_0\rangle\,, \quad n_0 = 0,1,2,\dots \quad \text{(Bosonen)}$$

(i) Photonenverteilg. $|z_n|^2 = \rho_n$

$$|\Psi\rangle \to |n_0\rangle = \sum_n z_n\,|n\rangle \Longrightarrow |z_n|^2 = \rho_n = \delta_{n n_0}$$



offensichtlich scharfe Photonenverteilg.
es liegen genau n_0 Photonen vor

(ii) Photonzahl und Schwankg.

$$\langle n\rangle = \langle n_0|\,c^\dagger(t)\,c(t)\,|n_0\rangle = \langle n_0|\,c^\dagger c\,|n_0\rangle = n_0$$

$$e^{+i\omega t} \quad e^{-i\omega t}$$

$$\Delta n = \sqrt{\langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2} = \sqrt{n_0^2 - n_0^2} = 0$$

$\hookrightarrow \langle n_0|c^\dagger c\, c^\dagger c\,|n_0\rangle$

Die Schwankg. um Mittelwert verschwindet.
Der Fockzustand ist Zustand fester Photonzahl n_0

(iii) Feld- und Feldschwankg.:

$$\langle n_0|n_0-1\rangle = 0$$

$$\langle \vec{E}\rangle = \langle n_0|\, i g\, \vec{e}\, \xi(\vec{r})\, \underbrace{c(t) + \text{h.a.}\, |n_0\rangle}_{|n_0-1\rangle} = 0$$

$$\sqrt{\langle \vec{E}^2 \rangle} \hat{=} \text{Schwankg.} \neq 0$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 L^3} \underset{=}{(2n_0+1)} \hat{=} \text{Intensität} \qquad \text{ÜA}$$

Im Exp. wird Intensität über Photonen gemessen,

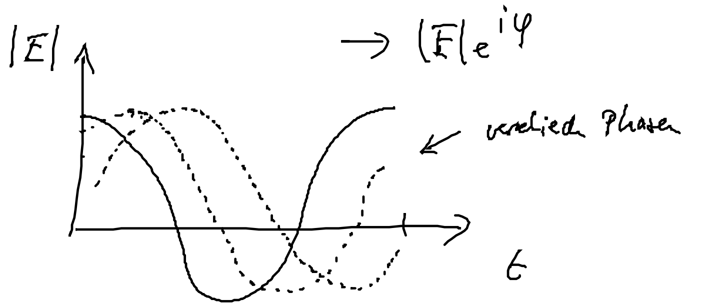
die Feldstärke selbst ist Null, für $n_0 = 0$ $\exists$ Vakuumfluktuation.

Klassisches Modell

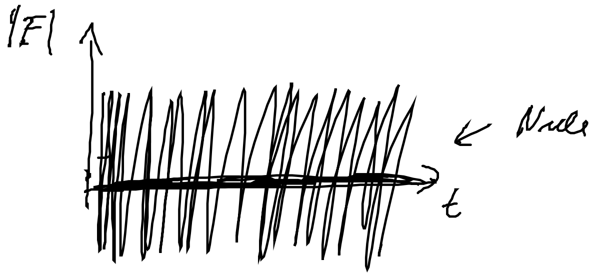
mit n_0 = fest steht Intensität des Felds $I \sim n_0$,

$\Downarrow$ Keine Schwankg. der Intensität $\sqrt{I} \sim |E|$ klassisch

Welle d. Phase und Amplitude charakterisiert
φ $|E|$



$\Downarrow$ Mittelg.



lasse Phase statistisch mit Wahrscheinlichkeit p_φ = konstant fluktuieren

$$\langle E \rangle_{klass} = \int_0^{2\pi} d\varphi \, \underbrace{p_\varphi}_{\frac{1}{2\pi} = \text{konstant}} |E| \, e^{i\varphi} \qquad + \text{c.c.}$$

$$= |E| \, \frac{1}{2\pi} \, \frac{e^{i\varphi}}{i} \Big|_0^{2\pi} = |E| \, \frac{1}{2\pi i} \left(e^{i 2\pi} - 1 \right) = \underline{\underline{0}}$$

qm. Interpretation von $|n_0\rangle$:

Unschärfe zwischen Intensität u. Phase $\qquad I \sim n$

$$\Delta\varphi \cdot \Delta n \gtrsim \frac{1}{2}$$: <u>Phasenoperator</u> noch in Diskussion