3.3 Diracgleichung in kovarianter Form

kovariant = Gleichungen die in allen Koordinatensystemen die durch Lorentztrafo verbunden sind identisch aussehen

Diracgleichg. aus letzter VL: multipliziert $\hat{\beta}/ c\hbar$

$$\left\{ -i \left(\underline{\hat{\beta}}\, \underset{\sim}{\partial_0} + \underline{\hat{\beta} \hat{\alpha}^i}\, \underset{\sim}{\partial_i} \right) + \frac{m_0 c}{\hbar} \hat{1} \right\} \vec{\psi} = 0$$

führe ein: $\underline{\vec{\gamma}} = \left(\hat{\beta}, \hat{\beta}\hat{\alpha}^1, \hat{\beta}\hat{\alpha}^2, \hat{\beta}\hat{\alpha}^3 \right)$, $\underset{\sim}{\partial_\mu} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$

$$\left(-i \underbrace{\gamma^\mu \partial_\mu} + \frac{m_0 c}{\hbar} \hat{1} \right) \vec{\psi} = 0 \quad \text{mit } \hat{\gamma}^i = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{\sigma}_i \\ -\hat{\sigma}^i & \hat{0} \end{pmatrix}$$

Vierergrößen, invariant gegen LT

nach Feynman: $\gamma^\mu \cdot \text{Größe}_\mu \Rightarrow$ ~~Größe~~

$$\boxed{\left(-i \not{\partial} + \frac{m_0 c}{\hbar} \underline{1} \right) \vec{\psi} = 0 \quad \text{Schnellschreibnotation der Diracgleichg.}}$$

$\not{\partial}$ $\hat{=}$ kovariante Ableitung

3.4. Ebene Wellen: Konstruktion

Vierspinor $\vec{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\varphi}_1 \\ \vec{\varphi}_2 \end{pmatrix}$ Teilchen / Antiteilchen

Ansatz: $\vec{\psi} = \vec{\psi}_0 \, e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t - \frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{r}\right)}$ $\quad \vec{p}$ – Impuls (Vektor an Zahlen), E – Energie

$$\vec{\psi}_0 = \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{\varphi}_1 \\ \vec{\varphi}_2 \end{pmatrix}}$$

konstant, nicht von $\vec{r}$, t abhängig

einsetzen in $\left(-i\not{\partial} + \frac{m_0 c}{\hbar}\right)\vec{\psi} = 0$, mit $\hbar c$ multiplizieren

$$E\begin{pmatrix} \vec{\varphi}_1 \\ -\vec{\varphi}_2 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \hat{0} & \vec{\hat{\sigma}}\cdot\vec{p} \\ -\vec{\hat{\sigma}}\cdot\vec{p} & \hat{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{\varphi}_1 \\ \vec{\varphi}_2 \end{pmatrix} + m_0 c^2 \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{\varphi}_1 \\ \vec{\varphi}_2 \end{pmatrix}$$

$\underline{1} = \hat{1} = \hat{\underline{I}}$

1. Zeile: $E\vec{\varphi}_1 = c\,\vec{\hat{\sigma}}\cdot\vec{p}\,\vec{\varphi}_2 + m_0 c^2 \vec{\varphi}_1$

2. Zeile: $-E\vec{\varphi}_2 = -c\,\vec{\hat{\sigma}}\cdot\vec{p}\,\vec{\varphi}_1 + m_0 c^2 \vec{\varphi}_2$

Gleichungssystem mit Informationen:

a) Lösbarkeitsbedingung wg. Homogenität d. Systems

$\longrightarrow E^2 = \left(c^2\vec{p}^2 + m_0^2 c^4\right)$ mit $E_\pm = \pm|E(\vec{p})|$

$\lambda = \pm$, $\Rightarrow E = E_\lambda$ mit 2 Lösungen

6) Beziehg. zwischen $\vec{\varphi}_1$ und $\vec{\varphi}_2$:

aus 2. Zeile: $\vec{\varphi}_2 = \frac{c\,\hat{\vec{\sigma}}\cdot\vec{p}}{E_\lambda + m_0 c^2}\,\vec{\varphi}_1$

$$\rightarrow \quad \vec{\psi}_{\vec{p}\lambda}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} \vec{\varphi}_1 \\ \frac{c\,\hat{\vec{\sigma}}\cdot\vec{p}}{E_\lambda + m_0 c^2}\,\vec{\varphi}_1 \end{pmatrix} e^{-i\left(\frac{E_\lambda(\vec{p})}{\hbar}t - \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right)}$$

Quantenzahl $\vec{p}$ f. Impulsoperator

Quantenzahl zur Energie E_λ

$\vec{\varphi}_1$ verbleibt als Unbekannte

aber kann durch zwei Vektoren aufgespannt werden:

$$\vec{\chi}_{m_s} = \left\{ m_s = \pm\tfrac{1}{2} : \ \vec{\chi}_{+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \vec{\chi}_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$$\rightarrow \quad \vec{\psi}_{\vec{p},\lambda,m_s} = N \cdot \begin{pmatrix} \vec{\chi}_{m_s} \\ \frac{c\,\hat{\vec{\sigma}}\cdot\vec{p}}{E_\lambda + m_0 c^2}\,\vec{\chi}_{m_s} \end{pmatrix} e^{-i\left(\frac{E_\lambda(p)}{\hbar}t - \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right)}$$

Normierungsfaktor

allg. Lösg. als Superposition über alle $\vec{p}, \lambda, m_s$

$$\boxed{\vec{\psi}(\vec{r},t) = \sum_{\substack{\lambda=\pm \\ m_s=\pm\frac{1}{2} \\ \vec{p}\in\mathbb{R}}} \underbrace{C_{\vec{p},\lambda,m_s}}_{\text{Koeffizienten = Zahlen}} \vec{\psi}_{\vec{p}\lambda m_s}(\vec{r},t)}$$

<u>Normierg. d. ebenen Welle + Verfahren ψ</u>

$$\vec{\psi}^{+}\cdot\vec{\psi} \overset{!}{=} 1 \quad \text{f. } m_s=\frac{1}{2} \text{ als Bsp:}$$

$$\vec{\psi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c\,\hat{\vec{\sigma}}\cdot\vec{p}}{E_1+m_0c^2}\vec{\chi}_{1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c}{E_1+m_0c^2}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ p_x \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ p_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_z \\ 0 \end{pmatrix}\right] \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\hat{\vec{\sigma}}\cdot\vec{p} = \hat{\sigma}^x p_x + \hat{\sigma}^y p_y + \hat{\sigma}^z p_z$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} p_x + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix} p_y + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} p_z$$

$$\hat{\vec{\sigma}}\cdot\vec{p}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = p_x\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_y\begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_z\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ p_x \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ p_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\psi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c}{E_\lambda + m_0 c^2} p_z \\ \frac{c}{E_\lambda + m_0 c^2}(p_x + i p_y) \end{pmatrix} \qquad \vec{\psi}^+ = \left(1, 0, \frac{c}{E_\lambda + m_0 c^2} p_z, \frac{c}{E_\lambda + m_0 c^2}(p_x - i p_y)\right)$$

$$\vec{\psi}^+ \cdot \vec{\psi} = 1 + 0 + \frac{c^2}{(E_\lambda + m_0 c^2)^2}\Big(p_z^2 + \underbrace{(p_x + i p_y)(p_x - i p_y)}_{p_x^2 + p_y^2}\Big)$$

$$= 1 + \frac{c^2 \vec{p}^2}{(E_\lambda + m_0 c^2)^2} = \frac{2 E_\lambda}{E_\lambda + m_0 c^2} \overset{!}{=} N^{-2}$$

als Normierg.

$E_\lambda(\vec{p})$ verwendet

um $\vec{p}^2$ zu eliminieren

3.5. Ebene Wellen: Interpretation

Gesamtlösg:
$$\vec{\psi}_{\vec{p},\lambda,m_s} = \underbrace{\left(\frac{m_0 c^2 + E_\lambda}{2 E_\lambda}\right)^{1/2}}_{\text{Normierg.}} \begin{pmatrix} \vec{\chi}_{m_s} \\ \frac{c \hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{p}}{E_\lambda + m_0 c^2} \vec{\chi}_{m_s} \end{pmatrix} e^{-i \cdots}$$

Bemerkungen:

a) $\psi_{\vec{p},\lambda,m_s}$ sind als ebene Wellen Lösungen der Diracgleichung

b) Indizes: $\vec{p}$: Quantenzahl und Eigenwert des Impulsoperators $\underline{\vec{p}}$

$$\underline{\vec{p}}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar} = \vec{p}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar} \qquad \vec{p} \in \mathbb{R}$$

λ : Quantenzahl zur Energiedispersion $E_\lambda(p)$

und kennzeichnet den Eigenwert von H_{Dirac}

$\lambda = \pm$ (2 Energiezweige)

m_s : Quantenzahl / Eigenwert zu Operator „?"

wird gezeigt: dieser Operator ist

Helizitätsoperator $\underline{\Lambda} = \hat{\underline{s}} \cdot \frac{\vec{\underline{p}}}{|\vec{\underline{p}}|}$

mit Spinoperator $\underline{\hat{s}}^i = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \hat{\sigma}^i & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}^i \end{pmatrix}$

(<u>Operator</u> , $\hat{\text{Matrize}}$)

$\Longrightarrow$ es muß ein gemeinsames Eigenfunktionssystem von

$\underline{\Lambda}$, $\underline{H}$, $\underline{\vec{p}}$ existieren : ebene Wellen.

für $\underline{\Lambda}$ ist das noch zu zeigen ...

<u>Helizitätsoperator und Spinoperator</u>

Analogie zwischen Drehimpuls und Spinoperator:

$[\underline{l}_j, \underline{l}_k] = i\hbar\, \underline{l}_m$, zyklisch $\qquad \underbrace{[\hat{s}_j, \hat{s}_k]}_{\text{Vertauschung v. } 4\times 4 \text{ Matrizen}} = i\hbar\, \hat{s}_m$

$[\underline{l}^2, \underline{\vec{l}}] = 0 \qquad [\hat{\vec{s}}^2, \hat{\vec{s}}] = 0$

$l^2\, Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = \hbar^2\, l(l+1)\, Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \qquad \hat{s}^2\, \vec{\psi}_{\lambda p m_s} = \hbar^2\, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) \psi_{\lambda p m_s}$

$\underline{l}_z\, Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = \hbar\, m_l\, Y_{l m_l}(\vartheta,\varphi) \qquad \hat{s}_z\, \psi_{\lambda p m_s} = \hbar\, m_s\, \psi_{\lambda p m_s}$

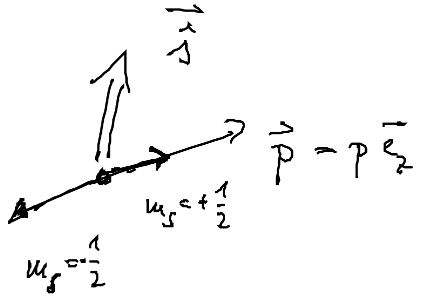
$\hat{s}_z$ = Helizitätsoperator, wenn ebene Welle in z-Richtung läuft

$\underline{\Lambda} = \hat{\vec{s}} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \qquad \vec{p} = \vec{e}_z\, p$

$\underline{\Lambda} = \hat{s}_z$

$$\hat{s}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^z & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}^z \end{pmatrix}$$

Aufgrund des Eigenwertproblems f. $\hat{\vec{s}}^2$ wird in Analogie mit dem Drehimpuls $\vec{l}^2$ durch die Diracgleichung Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen beschrieben. Der Helizitätsoperator $\underline{\Lambda}$ ist für Ausbreitg. in z-Richtg. die z-Kompt. d. Spinoperators:



} 2 mögl. Einstellg. können gemessen werden.

es ist noch zu zeigen:

$$\underline{\Lambda} \begin{pmatrix} \vec{\chi}_{\frac{1}{2}} \\ m\,\vec{\chi}_{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \overset{!}{=} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \vec{\chi}_{1/2} \\ m\,\vec{\chi}_{1/2} \end{pmatrix}$$

Zahl

$$\underline{\Lambda} = \vec{\hat{S}} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma^z & 0 \\ 0 & \sigma^z \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & & -1 \end{pmatrix}$$

$\vec{e}_z$-Richtg.

$$\leadsto \underline{\Lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \\ & -1 & & \\ 0 & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

analog. findet man:

$$\underline{\Lambda} \begin{pmatrix} \vec{\chi}_{-\frac{1}{2}} \\ m\,\vec{\chi}_{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \vec{\chi}_{-\frac{1}{2}} \\ m\,\vec{\chi}_{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ damit ist $m_s = \pm \frac{1}{2}$ die Quantenzahl zu Helizitätsoperator

ebenso zu zeigen:

$$\hat{\vec{S}}^2 \begin{pmatrix} \vec{\chi}_{m_s} \\ m\chi_{m_s} \end{pmatrix} = \hbar^2 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) \begin{pmatrix} \vec{\chi}_{m_s} \\ m\chi_{m_s} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\vec{S}}^2 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \hat{\vec{\sigma}} & 0 \\ 0 & \hat{\vec{\sigma}} \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \hat{\vec{\sigma}} & 0 \\ 0 & \hat{\vec{\sigma}} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} \hat{\vec{\sigma}}^2 & 0 \\ 0 & \hat{\vec{\sigma}}^2 \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{4} \cdot 3 \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & \hat{1} \end{pmatrix} = \hbar^2 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & \hat{1} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^2 + \hat{\sigma}_z^2 = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{analog}}{=} \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_z^2$$

3.7. Ebene Wellen Lsg: Kompakt

$$\psi_{\vec{p}, \lambda, m_s}$$

$\psi_{\vec{p},\pm,\pm\frac{1}{2}} \rightarrow$ f. jede $\vec{p}$ $\exists$ 4 Lösungen:

für die obere / untere E-Dispersion

mit jeweils Spin in $+p_z$ und $-p_z$ projiziert

<u>Bsp</u>: $$\vec{\psi}_{\vec{p},+,-\frac{1}{2}} = N(E_+) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c p_z}{E_+ + m_0 c^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-i\left(\frac{E_+ t}{\hbar} - \frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{\hbar}\right)}$$

$$= N(E_+) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{c p_z}{(E_+ + m_0 c^2)} \end{pmatrix} e^{i\cdots}$$

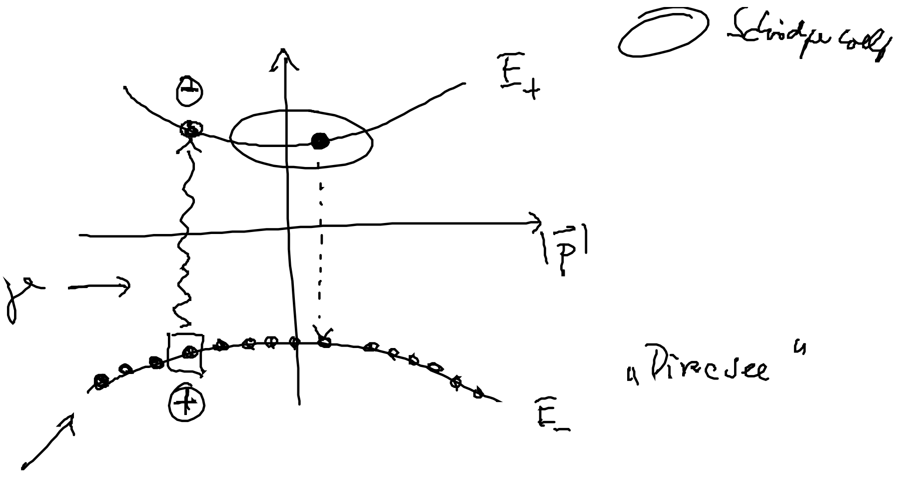
insgesamt: $\vec{\psi}_{\vec{p},+,+\frac{1}{2}}$, $\vec{\psi}_{\vec{p},+,-\frac{1}{2}}$, $\vec{\psi}_{\vec{p},-,+\frac{1}{2}}$, $\vec{\psi}_{\vec{p},-,+\frac{1}{2}}$.

3.8. Das Energiespektrum d. Diracteilchen

die positiven und negativen Energien sind ernst zu nehmen:

die Überprüfg. der Energieinterpretation über die Hamiltondichte liefert wieder $E_\pm \gtrless 0$.

Dirac



- um die Rekombination von E_+ Elektronen auf E_- Zustände zu verhindern, bevölkert man E_- mit Elektronen → Zustände E_- sind blockiert (Pauli-Prinzip)

- durch γ-Ent kann Teilchen-Antiteilchen paar erzeugt werden, es entsteht ein Elektron-Positron Paar.

- problematisch: Energie-Impuls erhaltg.