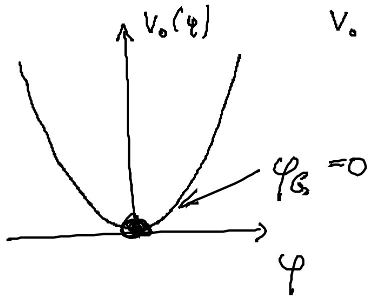
2.3. Spontane Symmetriebrechung und Higgsmechanismus

- um Masse für Bosonfeld $\vec{A}(\vec{r},t)$ zu erhalten benötigen wir einen endlich Wert für φ im Grundzustand:

$$\varphi_G \hat{=} v \neq 0$$

- bisherige Lagrangedichte: $\mathcal{L} = \frac{\hbar}{2m_0}\partial_\mu\partial^\mu\varphi - \underbrace{\frac{1}{2}m_0c^2\varphi^2}_{V_0} = T - V_0$

hat aber $\varphi_G = 0$,
wenn V_0 als Potential
interpretiert wird:



- Idee v. P. Higgs (1964): Addition von Wechselwirkungsterm V_{WW}

$$V_{WW} = -\lambda'\varphi^2 + \underbrace{\frac{\lambda}{4}\varphi^4} \qquad \varphi^4\text{-Theorie}$$

λ, λ': Zahlen

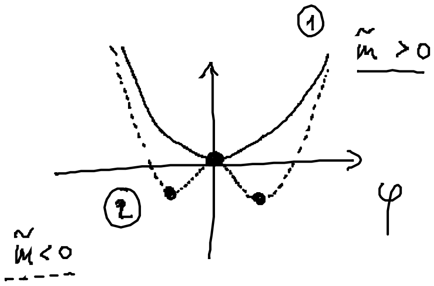
z.B. später eine „Art" Coulomb-WW:
~ Ladungsdichte mal Ladungsdichte ~ $\psi^*\psi$ und $\psi^*\psi \Rightarrow \varphi^4$

$\Rightarrow$ neuer Grundzustand von φ über Wechselwirkungspotential:

$$\mathcal{L} = T - V_0 - V_{WW} = T - V$$

$$V = \left(\frac{1}{2} m_0 c^2 - \lambda'\right)\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4 \equiv \frac{1}{2}\tilde{m} c^2 \varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4$$

neuer Masseterm



(1) $\varphi_G = 0$ stabiles Minimum $\rightarrow$ $\vec{A}$ keine Masse

(2) $\varphi_G \neq 0$ 2 stabile Minima $\rightarrow$ $\vec{A}$ hat Masse

Minima: $$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \stackrel{!}{=} \left(\tilde{m} c^2 + \lambda \varphi_G^2\right)\varphi_G \quad \begin{array}{l} \nearrow \varphi_G = 0 \\ \searrow \varphi_G \neq 0 \end{array}$$

$$\varphi_G = \pm\left(-\frac{\tilde{m} c^2}{\lambda}\right)^{1/2} \equiv \pm v \quad \text{für } \tilde{m} < 0$$

Bemerkungen:

a) durch WW von φ mit sich selbst entstehen zwei neue Grundzustände $\pm v \neq 0$.

b) diese Grundzustände sind nicht symmetrisch, man spricht von spontaner Symmetriebrechung:

die Symmetrie von $\mathcal{L}$: $\mathcal{L}(-\varphi) = \mathcal{L}(\varphi)$ ist nicht in der Lösung vorzufinden

c) für kleine Störungen kann man $\varphi = \underset{\text{Konstante}}{v} + \underbrace{\eta(x^\mu)}_{\text{Higgsfeld}}$

aus $\mathcal{L} = \frac{\hbar}{2m_0}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}\tilde{m}c^2\varphi^2 - \frac{1}{4}\lambda\varphi^4$

wird: $\mathcal{L}_\eta = T - \frac{1}{2}\tilde{m}c^2(v+\eta)^2 - \frac{1}{4}\lambda(v+\eta)^4$

für $\eta \ll v$ ausführen:

$$\mathcal{L}_\eta = \frac{\hbar^2}{2m_h}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta \underbrace{- \frac{1}{2}\lambda v^2\eta^2}_{\text{Masseterm f. Higgsfeld}} \overbrace{- \lambda v\eta^3}^{\text{Selbst-WW}} + \text{höhere Terme in } \eta$$

$c^2 m_h = \lambda v^2 \implies$ Masse des Higgsfeldes $m_h = \frac{\lambda v^2}{c^2}$

jetzt analog. Massebestimmung f. $\vec{A}$ wie in letzter VL:

WW mit η statt mit φ: $\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_r \to \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_r - q\vec{A}$

Masseterm aus: $\frac{\partial \mathcal{L}_{WW}}{\partial \vec{A}} = -\frac{q^2 v^2}{m_h}\vec{A}$, jetzt mit $v \neq 0$

$$\boxed{\Box\vec{A} = \mu_0\frac{q^2}{m_h}v^2\vec{A} \equiv \underbrace{\left(\frac{M_B c}{\hbar}\right)^2}_{\lambda_c^{-2}}\vec{A}}$$

<u>Ergebnis:</u> Gleichg. f. Bosefeld $\vec{A}$ mit endlicher Masse aufgrund von $v \neq 0$

<u>Higgsmechanismus:</u>

1/ es muß ein wechselwirkendes Feld φ vorliegen, erfüllt ganzen Raum und WW mit den Teilchen die Masse erhalten sollen

2) Symmetrie von φ muß gebrochen sein,
so daß im Vakuum $\varphi_G = v \neq 0$ ist
„spontane Symmetriebrechg."

3) Masse M_B des $\vec{A}$-Bosons ist damit

$$\underbrace{\left(\frac{M_B c}{\hbar}\right)^2}_{\text{bereits gemessen}} = \underbrace{\mu_0 \frac{q^2}{m_4}}\, v^2$$

bereits gemessen $\Rightarrow$ suche nach Teilchen mit v und Masse m_4

3. Diracgleichung f. freie Teilchen

- Klein-Jordan-Gl.: 2. Zeit/Ortsableitungen $\Rightarrow$ kein Spin, Ladungsdichte!
- Dirac-Gl.: 1. Zeit/Ortsableitg. $\Rightarrow$ Spin $\frac{1}{2}$, Wahrscheinlichkeitsinterpretation (1927/28)

- Grundlage: $E^2 = (c^2 p^2 + m_0^2 c^4)$ muß weiter gelten
  um zu erst. Ableitg zu kommen könnte man
  lichtartige: cp und ruheartige: $m_0 c^2$ überlegen $\Rightarrow$ Ansatz

$$\text{„}E\text{“} = \text{„}cp\text{“} + \text{„}m_0 c^2\text{“} \rightarrow \text{Übergang zu QM:}$$

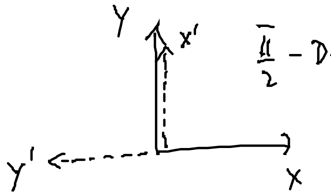
$$i\hbar \partial_t \Psi = \Big(c\,\alpha^k \underbrace{\frac{\hbar}{i}\partial_k}_{k:\{x,y,z\}} + \beta m_0 c^2\Big)\Psi \equiv \underline{H}\Psi$$

$\alpha_k, \beta \rightarrow$ sind zu bestimmen

Bemkg: a) einfachster Ansatz f. 1. Ordg. Dgl.

b) β, α^k, ψ können keine einfachen Skalare sein:

für Skalare wäre die D-Gl. nicht invariant gegen Raumdrehg.:



$\frac{\pi}{2}$ - Drehg. $\quad y = x', \; x = -y'$

$\Downarrow \; \partial_y = \partial_{x'}, \; \partial_x = -\partial_{y'}$

$\rightarrow$ die α^k's müssten das irgendwie richtig stellen,

Zahlen können das nicht

3.1. Bestimmg. d. Diraccoeffizienten α^k, β

Energie-Impulsbeziehg. muß gelten $\Downarrow$ Kl.-G.-Gl. muß f. $\vec{\psi}$ gelten

dazu 2. Ableitg. erzeugen: $i\hbar\partial_t$, ( ) nochmal anwenden:

$$-\hbar^2 \partial_t^2 \psi = \left(c\alpha^l \frac{\hbar}{i}\partial_l + \beta m_0 c^2\right)\left(c\alpha^k \frac{\hbar}{i}\partial_k + \beta m_0 c^2\right)\psi$$

da α kein Vektor sein kann muß die nächste Schwierigkeitsstufe gewählt werden,

Dirac: 4×4 Matrizen, aber $N \times N$ geht i.a. auch, Matrizen nicht vertauschbar!

$$-\partial_t^2 \vec{\psi} = -c^2 \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(\hat{\alpha}^l \hat{\alpha}^k + \hat{\alpha}^k \hat{\alpha}^l\right)}_{\text{sym. von historischem Matrizenprodukt um nicht Reihenfolge auszuzeichnen}} \partial_l \partial_k \underbrace{\vec{\psi}}_{\vec{\psi} \text{ wird zu Vektor, vgl. Matrizenansatz}}$$

$$+ \frac{c}{\hbar i} m_0 c^2 \left(\underbrace{\hat{\alpha}^l \partial_l \hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\alpha}^k \partial_k}_{(\hat{\alpha}^k \hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\alpha}^k)\partial_k}\right)\vec{\psi}$$

$$+ \hat{\beta}^2 \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \vec{\psi}$$

um K.-G. Gl. zu bekommen:

(i) $$\underbrace{\hat{\alpha}^{\ell}\hat{\alpha}^{k} + \hat{\alpha}^{k}\hat{\alpha}^{\ell}}_{\text{Antikommutator } [\hat{\alpha}^{\ell}, \hat{\alpha}^{k}]_+} = 2\,\delta_{k\ell}\,\hat{I} \quad \Rightarrow \text{Laplaceoperator } \Delta$$

(ii) $$\hat{\alpha}^{k}\hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\alpha}^{k} = \hat{0}$$

(iii) $$\hat{\beta}^{2} = \hat{1}\,, \quad \text{bzw} \quad \hat{\beta} = \hat{\beta}^{-1}$$

$$\Downarrow \qquad -\partial_t^2 \vec{\Psi} = -c^2 \underbrace{\sum_k \partial_k^2}_{\Delta} \vec{\Psi} + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \vec{\Psi} \qquad \checkmark \text{ Klein-Gordon-Gl.}$$

$\rightarrow$ Einsteinsche Energie-Impuls-Relation ist gesichert

(i)-(iii) sind Bestimmungsgleichungen f. Matrizen $\hat{\alpha}^k$, $\hat{\beta}$:

a) $$+\,sp(\hat{\alpha}^k) \underset{\underset{(ii)}{\nearrow}}{=} -\,sp(\hat{\beta}\hat{\alpha}^k\hat{\beta}^{-1}) = -\,sp(\hat{\alpha}^k\hat{\beta}^{-1}\hat{\beta}) = -\,sp(\hat{\alpha}^k)$$

Die Spur und damit die Summe der Eigenwerte muß 0 sein.

b) $$(\hat{\alpha}^k)^2 \underset{\underset{(i)}{\nearrow}}{=} \hat{I}$$: die Matrix $\hat{\alpha}^k$ kann nur Eigenwerte ± 1 besitzen

c) Dimension N: wg. (a) und (b) muß N gerade sein.

N muß hinreichend groß sein, um Gg. aufzuspannen

$\rightarrow$ $N=4$ ist die erste Mgl. die Bedingg. (i) – (iii) zu erfüllen

nach Dirac: 4×4 Matrizen:

$$\hat{\alpha}^K = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{\sigma}^K \\ \hat{\sigma}^K & \hat{0} \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{I} & \hat{0} \\ \hat{0} & -\hat{I} \end{pmatrix}$$

$$\hat{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}^{1/x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\sigma}^{2/y} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}^{3/z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ <u>Diracgleichg.</u>

$$i\hbar\partial_t \vec{\psi} = \Big(c\,\hat{\alpha}^k \overbrace{\frac{\hbar}{i}\partial_K}^{\hat{p}_K} + \hat{\beta}\, m_0 c^2\Big)\vec{\psi}, \quad \vec{\psi} = \vec{\psi}(\vec{r}, t)$$

$k = x, y, z$

Vierkomponentiger Vektor $\hat{=}$ „Spinor", Vierspinor"

Summe über $\hat{\alpha}$-Matrizen ($k = x, y, z$) „verzinst" mit ∂_k

3.2. Diracgleichung erfüllt Kontinuitätsgleichung und AWD-Interpretation

$$i\hbar \partial_t \vec{\psi} = c\,\hat{\alpha}^k (\hat{p}_k \vec{\psi}) + \hat{\beta} m_0 c^2 \vec{\psi} \quad \Big| \vec{\psi}^+ \cdot$$

$$-i\hbar \partial_t \vec{\psi}^+ = c(\hat{p}_k \vec{\psi}^+)\hat{\alpha}^{+k} + \vec{\psi}^+ \hat{\beta}^+ m_0 c^2 \quad \Big| \cdot \vec{\psi}$$

Gleichg. voneinander subtrahieren und beachte $\hat{\alpha}^{+k} = \hat{\alpha}^k$, $\hat{\beta}^+ = \hat{\beta}$

und $i\hbar$ teilen

$\Downarrow$ Kontinuitätsgleichg.:

$$\partial_t \underbrace{\vec{\psi}^+ \cdot \vec{\psi}}_{} = -\partial_k \underbrace{c\,\vec{\psi}^+ \hat{\alpha}^k \vec{\psi}}_{J_k \text{ Stromdichte}}$$

$$\rho \equiv \sum_k |\psi_k|^2 \geq 0$$

$$\boxed{\text{Kontinuität} \quad \partial_t \rho = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}}$$

Diracgl. erlaubt die AWD-Interpretation.