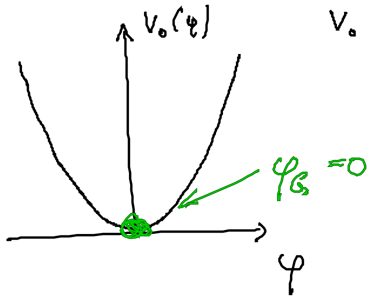
2.3. Spontane Symmetriebrechung und Higgsmechanismus

- um Masse für Bosonfeld $\vec{A}(\vec{r},t)$ zu erhalten benötigen wir einen endlichen Wert für φ im Grundzustand:

$$\varphi_G \hat{=} v \neq 0$$

- bisherige Lagrangedichte: $\mathcal{L} = \frac{\hbar}{2m_0}\partial_\mu\partial^\mu\varphi - \underbrace{\frac{1}{2}m_0c^2\varphi^2}_{V_0} = T - V_0$

hat aber $\varphi_G = 0$, wenn V_0 als Potential interpretiert wird:



- Idee v. P. Higgs (1964): Addition von Wechselwirkungsterm V_{WW}

$$V_{WW} = -\lambda'\varphi^2 + \underbrace{\frac{\lambda}{4}\varphi^4} \qquad \varphi^4\text{-Theorie}$$

λ, λ': Zahlen

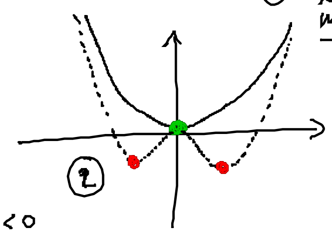
z.B. später eine „Art" Coulomb-WW:
$\sim$ Ladungsdichte mal Ladungsdichte $\sim \psi^*\psi$ und $\psi^*\psi \Rightarrow \varphi^4$

↳ neuer Grundzustand von φ über Wechselwirkungspotential:

$$\mathcal{L} = T - V_0 - V_{WW} = T - V$$

$$V = \left(\frac{1}{2} m_0 c^2 - \lambda'\right)\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4 \equiv \frac{1}{2}\underset{\nearrow}{\tilde{m}} c^2 \varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4$$

neuer Massenterm



1. $\varphi_G = 0$ stabiles Minimum $\rightarrow \vec{A}$ keine Masse
2. $\varphi_G \neq 0$ 2 stabile Minima $\rightarrow \vec{A}$ hat Masse

Minima: $$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \stackrel{!}{=} \left(\tilde{m} c^2 - \lambda \varphi_G^2\right)\varphi_G \quad \begin{matrix} \nearrow \varphi_G = 0 \\ \searrow \varphi_G \neq 0 \end{matrix}$$

$$\varphi_G = \pm\left(-\frac{\tilde{m} c^2}{\lambda}\right)^{1/2} \equiv \pm v \quad \text{für } \tilde{m} < 0$$

Bemerkungen:

a) durch WW von φ mit sich selbst entstehen zwei neue Grundzustände $\pm v \neq 0$.

b) diese Grundzustände sind nicht symmetrisch, man spricht von spontaner Symmetriebrechung:

die Symmetrie von $\mathcal{L}$: $\mathcal{L}(-\varphi) = \mathcal{L}(\varphi)$ ist nicht in der Lösung vorzufinden

c) für kleine Störungen kann man $\varphi = \underset{\substack{\nearrow \\ \text{Konstante}}}{v} + \underbrace{\eta(x^\mu)}_{\text{Higgsfeld}}$

aus $\mathcal{L} = \frac{\hbar}{2m_0} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} \tilde{m} c^2 \varphi^2 - \frac{1}{4} \lambda \varphi^4$

wird : $\mathcal{L}_\eta = T - \frac{1}{2} \tilde{m} c^2 (\nu + \eta)^2 - \frac{1}{4} \lambda (\nu + \eta)^4$

für $\eta << \nu$ ausführen :

$$\mathcal{L}_\eta = \frac{\hbar^2}{2m_h} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta \underbrace{- \frac{1}{2} \lambda \nu^2 \eta^2}_{\text{Massenterm f. Higgsfeld}} \overbrace{- \lambda \nu \eta^3}^{\text{Selbst-WW}} + \text{höhere Terme in } \eta$$

$c^2 m_h = \lambda \nu^2 \implies$ Masse des Higgsfeldes $m_h = \frac{\lambda \nu^2}{c^2}$

jetzt analog. Massebestimmung f. $\vec{A}$ wie in letzter VL :

WW mit η statt mit φ : $\quad \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_r \to \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_r - q \vec{A}$

Masseterm aus : $\frac{\partial \mathcal{L}_{WW}}{\partial \vec{A}} = - \frac{q^2 \nu^2}{m_h} \vec{A}$, jetzt mit $\nu \neq 0$

$$\boxed{\Box \vec{A} = \mu_0 \frac{q^2}{m_h} \nu^2 \vec{A} \equiv \underbrace{\left(\frac{M_B c}{\hbar} \right)^2}_{\lambda_c^{-2}} \vec{A}}$$

Ergebnis: Gleichg. f. Bosonfeld $\vec{A}$ mit endlicher Masse aufgrund von $\nu \neq 0$

Higgsmechanismus :

1/ es muß ein wechselwirkendes Feld φ vorliegen, erfüllt ganzen Raum und WW mit den Teilchen die Masse erhalten sollen

2) Symmetrie von φ muß gebrochen sein, so daß im Vakuum $\varphi_G = v \neq 0$ ist
„spontane Symmetriebrechg."

3) Masse M_B des $\vec{A}$-Bosons ist damit

$$\underbrace{\left(\frac{M_B c}{\hbar}\right)^2}_{\text{bereits gemessen}} = \underbrace{\mu_0 \frac{q^2}{m_4}}\, v^2$$

bereits gemessen $\Rightarrow$ suche nach Teilchen mit v und Masse m_4

3. Diracgleichung f. freie Teilchen

- Klein-Gordon-Gl.: 2. Zeit/Ortsableitungen $\Rightarrow$ kein Spin, Ladungsdichte!
- Dirac-Gl.: 1. Zeit/Ortsableitg. $\Rightarrow$ Spin $\frac{1}{2}$, Wahrscheinlichkeitsinterpretation (1927/28)

- Grundlage: $E^2 = (c^2 p^2 + m_0^2 c^4)$ muß weiter gelten
  um zu ersten Ableitg zu kommen könnte man
  lichtartig: cp und ruheartige: $m_0 c^2$ überlegen $\Rightarrow$ Ansatz

$$„E" = „cp" + „m_0 c^2" \rightarrow \text{Übergang zur QM:}$$

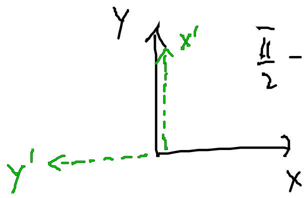
$$i\hbar \partial_t \Psi = \Big(c\alpha^k \underbrace{\frac{\hbar}{i}\partial_k}_{k:\{x,y,z\}} + \beta m_0 c^2\Big)\Psi \equiv \underline{H}\Psi$$

$\alpha_k, \beta \rightarrow$ sind zu bestimmen

Bem.: a) einfachster Ansatz f. 1. Ordg. Dgl.

b) β, α^k, ψ können keine einfachen Skalare sein:

für Skalare wäre die D-Gl. nicht invariant gegen Raumdrehg:



$\frac{\pi}{2}$ - Drehg. $\quad y = x', \; x = -y'$

$\Rightarrow \partial_y = \partial_{x'}, \; \partial_x = -\partial_{y'}$

$\rightarrow$ die α^k's müssten das irgendwie richtig schalten,

Zahlen können das nicht

3.1. Bestimmg. d. Diraccoeffizienten α^k, β

Energie-Impuls beziehg. muß gelten $\Rightarrow$ Kl.-G.-Gl. muß f. $\vec{\psi}$ gelten

dazu 2. Ableitg erzeugen: $i\hbar\partial_t$, ( ) nochmal anwenden:

$$-\hbar^2 \partial_t^2 \psi = \left(c\alpha^l \frac{\hbar}{i}\partial_l + \beta m_0 c^2\right)\left(c\alpha^k \frac{\hbar}{i}\partial_k + \beta m_0 c^2\right)\psi$$

da α kein Skalar sein kann muß die nächste Schwierigkeitsstufe gewählt werden,

Dirac: 4×4 Matrizen, aber $N\times N$ geht i.a. auch, Matrix nicht vertauschbar!

$$-\partial_t^2 \vec{\psi} = -c^2 \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(\hat{\alpha}^l \hat{\alpha}^k + \hat{\alpha}^k \hat{\alpha}^l\right)}_{\text{Sy von hist. Matrizenprodukt um nicht Reihenfolge auszuzeichnen}} \partial_l \partial_k \underbrace{\vec{\psi}}_{\vec{\psi} \text{ wird zu Vektor, erg. Matrizenansatz}}$$

$$+ \frac{c}{\hbar i} m_0 c^2 \left(\underbrace{\hat{\alpha}^l \partial_l \hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\alpha}^k \partial_k}_{(\hat{\alpha}^k \hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\alpha}^k)\partial_k}\right)\vec{\psi}$$

$$+ \hat{\beta}^2 \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \vec{\psi}$$

um K-G. Gl. zu bekommen:

(i) $$\underbrace{\hat{\alpha}^{\ell}\hat{\alpha}^{k}+\hat{\alpha}^{k}\hat{\alpha}^{\ell}}_{\text{Antikommutator } [\hat{\alpha}^{\ell},\hat{\alpha}^{k}]_+} = 2\,\delta_{k\ell}\,\hat{I} \quad \Rightarrow \text{Laplaceoperator } \Delta$$

(ii) $$\hat{\alpha}^{k}\hat{\beta}+\hat{\beta}\hat{\alpha}^{k} = \hat{O}$$

(iii) $$\hat{\beta}^2 = \hat{1}\,, \quad \text{bzw } \hat{\beta} = \hat{\beta}^{-1}$$

$$\Downarrow \qquad -\partial_t^2\vec{\Psi} = -c^2\underbrace{\sum_k \partial_k^2}_{\Delta}\vec{\Psi} + \frac{m_0^2c^4}{\hbar^2}\vec{\Psi} \qquad \checkmark \text{ Klein-Gordon-Gl.}$$

→ Einsteinsche Energie-Impuls-Relation ist gesichert

(i)-(iii) sind Bestimmungsgleichungen f. Matrizen $\hat{\alpha}^k$, $\hat{\beta}$:

a) $$+\,sp(\hat{\alpha}^k) \underset{\nearrow\,(ii)}{=} -\,sp(\hat{\beta}\hat{\alpha}^k\hat{\beta}^{-1}) = -\,sp(\hat{\alpha}^k\hat{\beta}^{-1}\hat{\beta}) = -\,sp(\hat{\alpha}^k)$$

Die Spur und damit die Summe der Eigenwerte muß 0 sein.

b) $$(\hat{\alpha}^k)^2 \underset{\nearrow\,(i)}{=} \hat{I}$$: die Matrix $\hat{\alpha}^k$ kann nur Eigenwerte ± 1 besitzen

c) Dimension N: wg. (a) und (b) muß N gerade sein.

N muß hinreichend groß sein, um Gl. aufzuspannen

$\Rightarrow$ $N=4$ ist die erste Mgl. die Bedingg. (i) – (iii) zu erfüllen

nach Dirac: 4×4 Matrizen:

$$\hat{\alpha}^k = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{\sigma}^k \\ \hat{\sigma}^k & \hat{0} \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{I} & \hat{0} \\ \hat{0} & -\hat{I} \end{pmatrix}$$

$$\hat{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}^{1/x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\sigma}^{2/y} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}^{3/z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ <u>Diracgleichg.</u>

$$i\hbar\partial_t \vec{\psi} = \Big(c\,\hat{\alpha}^k \overbrace{\tfrac{\hbar}{i}\partial_k}^{\hat{p}_k} + \hat{\beta}\, m_0 c^2\Big)\vec{\psi}, \quad \vec{\psi} = \vec{\psi}(\vec{r}, t)$$

$k = x, y, z$

Vierkomponentiger Vektor $\hat{=}$ „Spinor, Vierspinor"

Summe über $\hat{\alpha}$-Matrizen ($k = x, y, z$) „verzinst" mit ∂_k

3.2. Diracgleichung erfüllt Kontinuitätsgleichung und AWD-Interpretation

$$i\hbar \partial_t \vec{\Psi} = c\hat{\alpha}^k (\hat{p}_k \vec{\Psi}) + \hat{\beta} m_0 c^2 \vec{\Psi} \quad | \vec{\Psi}^+ \cdot$$

$$-i\hbar \partial_t \vec{\Psi}^+ = c(\hat{p}_k \vec{\Psi}^+) \hat{\alpha}^{k+} + \vec{\Psi}^+ \hat{\beta}^+ m_0 c^2 \quad | \cdot \vec{\Psi}$$

Gleichungen voneinander subtrahieren und beachte $\hat{\alpha}^{k+} = \hat{\alpha}^k$, $\hat{\beta}^+ = \hat{\beta}$

und $i\hbar$ teilen

$\downarrow$ Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_t \underbrace{\vec{\Psi}^+ \cdot \vec{\Psi}} = -\partial_k \underbrace{c \vec{\Psi}^+ \hat{\alpha}^k \vec{\Psi}}_{j_k \text{ Stromdichte}}$$

$$\rho \equiv \sum_k |\Psi_k|^2 \geq 0$$

$$\boxed{\text{Kontinuität} \quad \partial_t \rho = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}}$$

Diracgl. erlaubt die AWD-Interpretation.