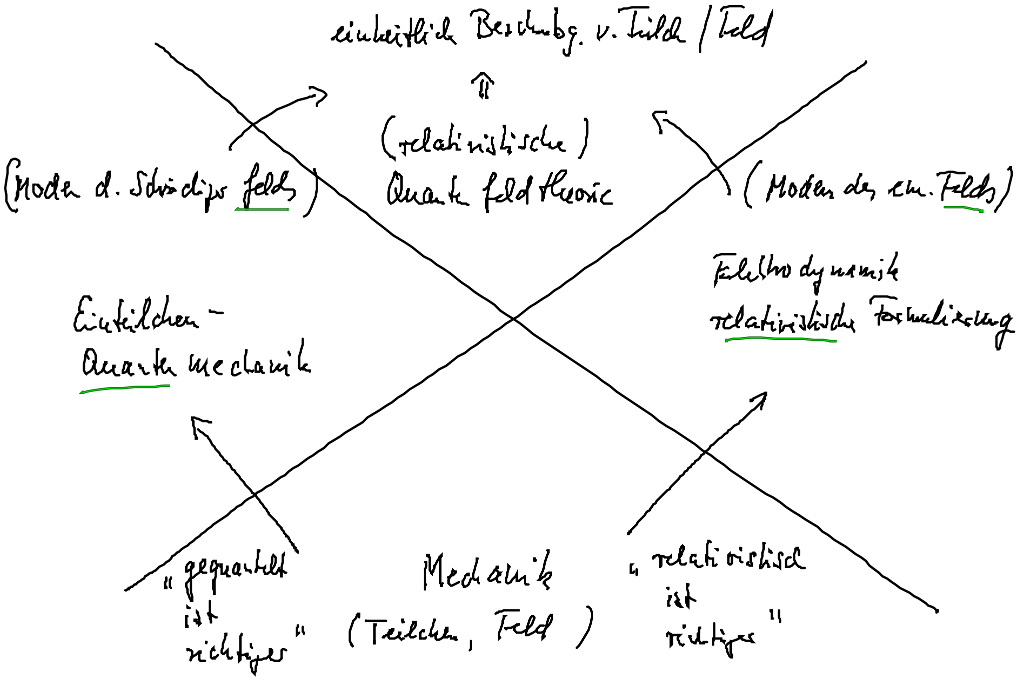
0/ Ziel der Vorlesung

Struktur d. VL / Physik



in 3. Dimension: statistische Physik

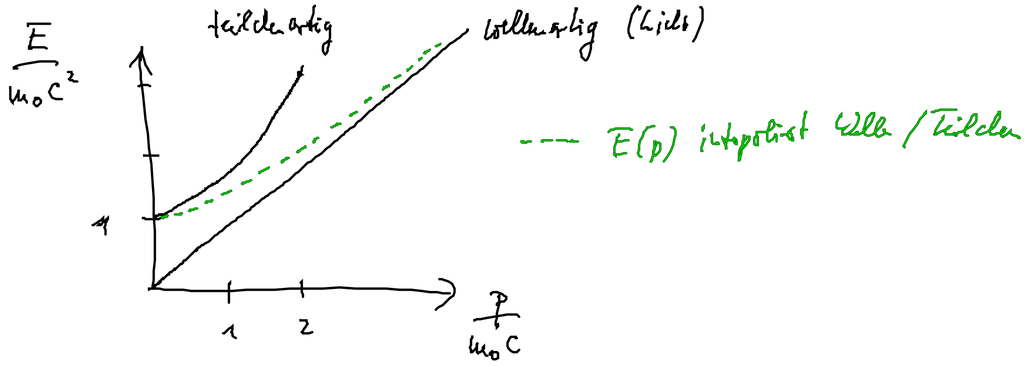
verbindendes Element: relativist. Energie-Impulsbeziehg.

$$E = \left(m_0^2 c^4 + c^2 p^2\right)^{1/2} = E(p) \quad \left(\text{bzw} \quad \omega = \omega(\vec{k})\right)$$

$$\approx \begin{cases} m_0 c^2 + \dfrac{p^2}{2 m_0}, & p \ll m_0 c \quad \hat{=} \text{ Ruheenergie + Schrödinger dispersion} \\ c p, & p \gg m_0 c \quad \hat{=} \; E \sim p,\ \omega = c k \text{ Lichtdispersion} \end{cases}$$

m_0: Ruhemasse

Dispersion enthält Teilchen und Welle aspekte



2. Historisches

woher:

- SRT: Einstein 1905
- Wellen / Matrizenmechanik: Schrödinger / Heisenberg 1925
- Unschärferelation: Heisenberg 1927
- Wahrscheinlichkeitsinterpretation 1927

wohin:

- relativistische Wellenmechanik
  Klein-Gordon-Gleichung: 1926 $\rightarrow$ Spin 0
  Dirac gleichung: 1927 $\rightarrow$ Spin $\frac{1}{2}$
- Quantisierg. des Wellenfeldes: Heisenberg, Pauli 1927
- QED: Feynman, Tomonaga, Schwinger 1945
  Bethe, Lamb, Weisskopf 1947
- Vielteilchentheorie: Hartree 1935
  Kohn 1965
- Quantenoptik: Glauber 1963

- Versteckte Parameter : Bell 1964
- Masse der Elementarteilchen : Higgs 1964
- Quanten computing / information
  Kryptographie Bennet 1984
  Faktorisierg. Shore 1994

I) Relativistische Wellengleichungen

Schrödingergleichg. $i\hbar \partial_t \Psi(\vec{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \vec{\nabla}^2 \Psi(\vec{r},t)$

Kombination von 1. Zeit- und 2. Ortsableitg.
unfaire Behandlg. v. Zeit / Ort $\Rightarrow$ nicht Lorentzinvariant

2 Mgl. zur Reparatur:

$$\underbrace{\partial_t \rightarrow \partial_t^2}_{\text{K-G.-Gl.}} \quad \text{oder} \quad \underbrace{\vec{\nabla}^2 \rightarrow \vec{\nabla}}_{\text{D-Gl.}}$$

1.) Klein-Gordon Gleichung

1.1.) Herleitung geht schnell

$\{ E \to i\hbar\partial_t \;,\; \vec{p} \to \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ als Ersetzung in
de Broglie relation $E\psi = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m_0}\psi$ findet man Schrödingergleichung.

analog zur Anwendung von relativistischer $E = E(p)$

$$\to \quad E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \qquad |\cdot\psi$$

$$\Downarrow \quad -\hbar^2\partial_t^2\psi = \left(-\hbar^2c^2\vec{\nabla}^2 + m_0^2c^4\right)\psi$$

$$\boxed{\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \lambda_c^{-2}\right)\psi(\vec{r},t) = 0 \quad \text{Klein-Gordon-Gleichung}}$$

$$\lambda_c = \frac{\hbar}{m_0 c} \quad \text{Compton-Wellenlänge}$$

<u>Bemerkungen:</u>

- Spin 0-Teilchen analog zur skalaren Schrödingergleichung (Boson)
- wird Ladungsfreiheitsgrad bringen $\Rightarrow$ geladene/ungeladene Bosonen
- relativistisch invariant, denn Wellenoperator $\Box$

- Compton - λ_c Interpretation

WW - über Eichboson vermittelt z.B. zwisch Fermion

eine stationäre Lösg in Kugelkoordinaten von Ψ

$$\Psi \sim \frac{e^{-r/\lambda_c}}{r} \quad \Rightarrow \lambda_c \text{ beschreibt Abklinglänge der WW}$$

$$\lambda_c = \frac{\hbar}{m_0 c} \quad \begin{array}{l} \nearrow m_0 \uparrow \Rightarrow \lambda_c \downarrow \quad \hat{=} \text{ elektroschwache WW} \\ \searrow m_0 \to 0 \Rightarrow \lambda_c \to \infty \quad \hat{=} \text{ Photon} \end{array}$$

W_0-Boson: $\lambda_c = 10^{-3}\,fm$, $m_0 = 80\,\frac{GeV}{c^2}$ der elektroschwachen WW

oft K-G.-Gl. in relativistisch Notation:

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + \lambda_c^{-2}\right) \Psi(x^\mu) = 0 \quad \text{(Summenkonvention)}$$

$$\vec{x}^\mu = (ct, x_1, x_2, x_3) \quad \vec{x}_\mu = (ct, -x_1, -x_2, -x_3)$$

$$\vec{\partial}_\mu = (\partial_{ct}, \partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}) \quad \vec{\partial}^\mu = (\partial_{ct}, -\partial_{x_1}, -\partial_{x_2}, -\partial_{x_3})$$

μ: griechisch $\to$ 0 - 3, lateinisch $\to$ 1 - 3.

1.2. Kontinuitätsgleichung

Schrödinger / Born:

$$\partial_t \rho(\vec{r},t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r},t) = 0$$

(AWD)

$$\rho = |\Psi(\vec{r},t)|^2 \geq 0 \text{ Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte}$$

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2m_0 i}\left(\psi^* \vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right)$$ Wahrscheinlichkeitsstrom

kann man Kontinuitätsgleichung f. K-G-Gl. entwerfen?

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + \lambda_c^{-2}\right)\psi(x^\mu) = 0$$

<u>ÜA</u>: konjugierte Gleichg. erzeugen, jeweils mit ψ^* bzw ψ multiplizieren, voneinander abziehen:

$$\partial_\mu\left(\psi^*\partial^\mu\psi\right) - \partial_\mu\left(\psi\partial^\mu\psi^*\right) = 0$$

geschickt umschreiben liefert und multiplizieren mit $\frac{i\hbar}{2m_0}$

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \ , \ \text{mit}$$

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m_0 c^2}\left(\psi^*\partial_t\psi - \psi\partial_t\psi^*\right) \quad \text{mit } \psi(\vec{r},t), \rho(\vec{r},t)$$

$$j_i = \frac{\hbar}{2m_0 i}\left(\psi^*\partial_i\psi - \psi\partial_i\psi^*\right)$$

ρ kann nicht als AWD interpretiert werden, weil $\rho \gtrless 0$ sein kann (z.B. über AB der K-G.-Gl. kann immer $\rho < 0$ gefunden werden)

<u>Idee später</u>: kann ρ mit der Elementarladung $e > 0$ multipliziert werden und als Ladungsdichte interpretiert werden?

<u>1.3. Lösungen der K-G. Gleichung</u>

Ansatz: ebene Welle

$$\Psi(\vec{r},t) = \underbrace{\sum_{\vec{p}} A(\vec{p})\, \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r} - E(p)t)}}_{\text{Partikuläre Lösung}}}_{\text{Gesamtlösung als Superposition}} \quad \text{mit } E = E(p)$$

Ansatz einsetzen: vollständiges System v. ebenen Wellen

$$-\frac{\vec{p}^2}{\hbar^2} + \frac{1}{c^2}\frac{E^2}{\hbar^2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} = 0 \quad \curvearrowright \quad E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 \checkmark$$

$$\text{mit } E(p) = \pm m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}} \equiv E_\pm(p) = \pm |E(p)|$$

Bemerkungen:

- ebene Wellen sind Lösungen, aber es gibt zu jedem Impuls $\vec{p}$ 2 Lösungen

$$\Psi_\pm(\vec{p}) = A_\pm(\vec{p})\, e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r} - E_\pm(p)t)}$$

- offensichtlich ist Parameter $E \lesseqgtr 0$ mögl., d.h. Interpretation als Energie zunächst problematisch, es wird gezeigt daß f. Ψ_+ und Ψ_- die Energie der Teilchen trotzdem $|E(p)|$ ist.

- $\Psi_\pm$ wird später als Teilchen / Antiteilchenpaar interpretiert

- jede relativist. Theorie ist sofort Vielteilchentheorie!

1.4 Energie des Klein-Gordon Felds

da $E_\pm(p)$ nicht als Energie interpretierbar, muß die Energie v. $\Psi_\pm$ anders berechnet werden, über $H = E$.

z.B. em. Feld: $w_{em} = \frac{\epsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2 \underset{?}{\longrightarrow} w_{KG} = f(\Psi)$

<u>Ziel</u>: Hamiltonformulierung f. Ψ

a) Raten der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Psi, \Psi^*, \partial_\mu \Psi, \partial_\mu \Psi^*)$$

$$\vec{p} = (\partial_{ct}, \partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$$

$$\mathcal{L} \underset{\text{raten}}{\uparrow}= \frac{\hbar^2}{2m_0}\left(\partial_\mu \Psi^* \partial^\mu \Psi - \lambda_c^{-2} \Psi^* \Psi\right)$$

b) Bestätigen der Lagrangedichte

$$\partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \Psi^*)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^*} = 0$$

ÜA: $\mathcal{L}$ einsetzen $\rightarrow \partial^\mu \partial_\mu \Psi + \lambda_c^{-2} \Psi = 0$

$\Downarrow$ $\mathcal{L}$ ist vernünftig.

c) Bestimmen der Hamiltondichte über Impulse d. Felds

$$\Pi_\Psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Psi)}$$

$$\Pi_{\Psi^*} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Psi^*)}$$

damit $\mathcal{H}(\Pi_\Psi, \Pi_{\Psi^*}, \Psi, \Psi^*) = \Pi_\Psi \partial_0 \Psi + \Pi_{\Psi^*} \partial_0 \Psi^* - \mathcal{L}$