2.4. Diskussion Ratengleichungen

Photonzahl: $\dot{n}_0 = \Gamma f_2 + \Gamma (f_2 - f_1) n_0$

Besetzung: $\dot{f}_2 = \underbrace{-\Gamma f_2}_{\substack{\text{Spontane} \\ \text{Effekte ohne } n_0}} \underbrace{- \Gamma (f_2 - f_1) n_0}_{\substack{\text{stimulierte Effekte} \\ \text{mit } n_0 \neq 0}}$

Γ: Rate der Elektron-Licht-WW

Erhaltungssatz: $f_1 = 1 - f_2$ als Nebenbedingung

a) spontane Effekte: $n_0 \ll 1$, AB: $f_2(0) = f_2^0$, $n_0(0) = 0$:

f_2^0 + Photonvakuum

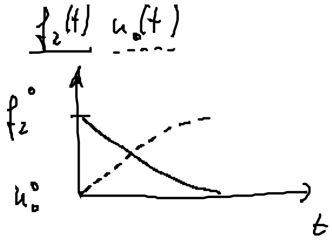
$\dot{n}_0 = \Gamma f_2$, $\underbrace{\dot{f}_2 = -\Gamma f_2}$

$\underbrace{\dot{n}_0 = \Gamma e^{-\Gamma t} f_2^0} \longleftarrow f_2 = f_2^0 e^{-\Gamma t}$

$$n_0 - \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{n_0^0} = \int_0^t dt' \, \Gamma e^{-\Gamma t'} f_2^0 = \left(1 - e^{-\Gamma t}\right) f_2^0$$

$\Rightarrow$ für spontane Effekte: $f_2 = f_2^0 e^{-\Gamma t}$

$$n_0 = (1-e^{-\Gamma t}) f_2^0$$



spontane Emission: $\downarrow$ mit n_0

Erhaltungssatz: $n_0 + f_2$ = konstant

(b) stimulierte Effekte: n_0 groß gegen 1

Ratengleichungsterme mit n_0 dominante Terme:

umschreiben der Gleichungen mit: $f_1+f_2=1$ $\quad f_1 = 1-f_2$

definieren der Inversion: $\Delta = f_1 - f_2$ Unbesetzungsmass für Abweichg. von Grundzustand

$\Delta = 1$ wenn ZNS in $|1\rangle$

$\Delta = -1$ wenn ZNS in $|2\rangle$

$$\dot{\Delta} = -2\dot{f}_2 \quad \text{aus} \quad \Delta = 1-2f_2$$

$\leadsto$ $\dot{n}_0 = -\Gamma \Delta n_0$, $\quad \dot{\Delta} = -2\Gamma\Delta n_0$ als umformulierte Ratengleichungen

AB: $n_0(0) = n_0^0 \neq 0$

$\Delta(0) = \Delta_0$

nichtlineares Gleichungssystem, Lösung durch Trick:

$$\frac{\frac{du_0}{\cancel{dt}}}{\frac{d\Delta}{\cancel{dt}}} = \frac{-\cancel{\Gamma\Delta}u_0}{-2\cancel{\Gamma\Delta}u_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{du_0}{d\Delta} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad u_0 - u_0^0 = \frac{1}{2}(\Delta - \Delta_0)$$

Einsetzen von $\Delta(t) = \Delta_0 + 2\,(u_0(t) - u_0^0)$ in $\dot{u}_0$ Gleichung:

$$\dot{u}_0 = -\Gamma\,(\Delta_0 - 2u_0^0)\,u_0 - 2\Gamma\,u_0^2 \qquad \text{nichtlineare Dgl f. } u_0$$

Trennung der Variablen:

$$\underbrace{\frac{du_0}{u_0\,(a + 2u_0)}}_{\text{Integraltafel}} = -\Gamma\,dt \quad \text{mit} \quad a = \Delta_0 - 2u_0^0$$

$$u_0(t) = \frac{(\Delta_0 - 2u_0^0)}{(\Delta_0\,e^{a\Gamma t} - 2u_0^0)}\;u_0^0$$

AB: $t = 0 \qquad u_0(t=0) = u_0^0$ ✓

Auswertg. für u_0^0 groß: $\quad a = \Delta_0 - 2u_0^0 < 0$

$\Rightarrow e^{-|a|\Gamma t} \;\hat{=}\;$ abklingende Exp. fkt.

stationär f. $t \to \infty$

$$u_0^{\text{stationär}} = \cancel{u_0^0}\;\frac{\Delta_0 - 2u_0^0}{-2\cancel{u_0^0}} = \frac{\Delta_0 - 2u_0^0}{-2}$$

$$= \begin{cases} \Delta_0 = 1 \;\rightarrow\; u_0^{\text{stationär}} = u_0^0 - \frac{1}{2} \\ \Delta_0 = -1 \;\rightarrow\; u_0^{\text{station}} = u_0^0 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Achtg: ist gem. Mittelwert, muß nicht ganzzahlig sein

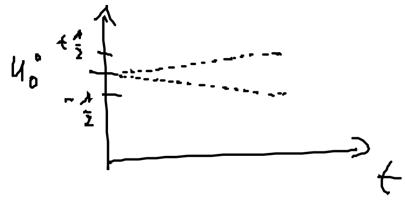
zugehörige Inversion:

$$\Delta^{\text{station}} = \Delta_0 + 2\left(u_0^{\text{stationär}} - u_0^0\right) = \Delta_0 + 2\left(u_0^0 \mp \frac{1}{2} - u_0^0\right)$$

$$= \mp 1 \pm 1 = \underline{\underline{0}}$$

Inversion ist Null f. beide $u_0^{\text{stationär}}$ (gem. Mittelwert)

<u>zeitl. Lsg.:</u>



$\Delta^{\text{st.}} = 0 \;\rightarrow$

im Mittel sind die Wahrscheinlichkeit oben/unten zu finden gleich.

<u>Warnung</u>: die Aussage daß man ein System durch Photonen nur von $\Delta_0 = -1 \rightarrow 0$ oder $\Delta_0 = +1 \rightarrow 0$ treiben kann gilt nur unter den gemachten Näherungen.

Jenseits der Markoffnäherung mit Laseranregg. $\langle c_{\lambda k} \rangle \neq 0$ kann man Rabioszillation erzeugen.

(c) Auswertg. f. Laserprozess

hier ohne spontan Emission:

$$\dot{n}_0 = -\Gamma n_0 \Delta - 2\kappa n_0$$

→ Dämpfg. der Photonzahl, Rate: κ ($\hat{=}$ Verluste in Resonatorwand)

$$\dot{\Delta} = -2\Gamma \Delta n_0 \underbrace{- \Gamma_p (\Delta - \Delta_p)}_{\text{Ergänzungen}}$$

→ Pumpprozeß an ZNS, treibt System in die Inversion Δ_p mit Rate Γ_p

-1

$+1$

→ sorgt f. Δ_p: also Inversion beim Laser $\Delta_p < 0$

suche stationär Lösungen:

$$\dot{\Delta} = 0 \quad \curvearrowright \quad \Delta = \frac{\Gamma_p \Delta_p}{2\Gamma n_0 + \Gamma_p}$$

einsetzen in $\dot{n}_0 = 0$ $\quad \curvearrowright \quad$ $$-\Gamma n_0 \frac{\Gamma_p \Delta_p}{(2\Gamma n_0 + \Gamma_p)} - 2\kappa n_0 = 0$$

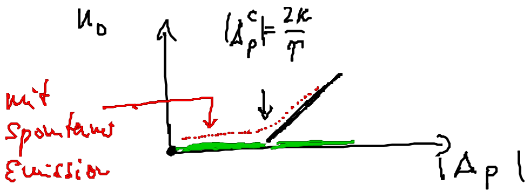
n_0-Gleichg. hat 2 mgl. Lösungen:

$$n_0^{(1)} = 0 \quad , \quad n_0^{(2)} = \frac{\Gamma_p}{4\kappa}\left(-\Delta_p - \frac{2\kappa}{\Gamma}\right) \neq 0$$

wenn $-\Delta_p > \frac{2\kappa}{\Gamma}$ und $\Delta_p < 0$

$$|\Delta_p| > \frac{2\kappa}{\Gamma}$$

Inversion muß f. endlichen Photonzahl Verluste κ kompensieren

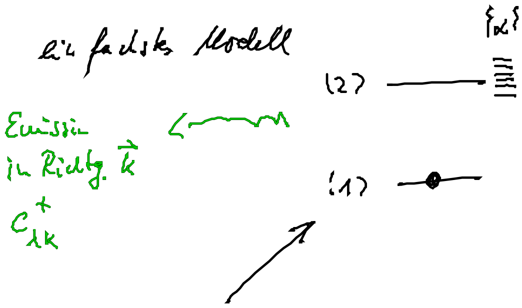


$u_0 = 0$

wenn Verluste nicht kompensiert werden

3. Schwingungsspektroskopie f. Zweiniveausysteme

einfaches Modell



Phononenmoden, koppeln an angeregten elektron. Zustand sonst ψ zu Born Oppenheimer Näherung

ebenso: nicht diagonale Kopplung zwischen el. Niveau weglassen da energetisch ungünstig

$$\Rightarrow H_{el-ph} = \sum_\alpha \hbar g^\alpha_{ll'} \, a_l^+ a_{l'} \, (b_\alpha^+ + b_\alpha)$$

$$\rightarrow \sum_\alpha \hbar g_\alpha \, a_2^+ a_2 \, (b_\alpha^+ + b_\alpha)$$

(diagonal : $l = l'$, $l = 2$)

Laserfeld $\vec{E}(t)$ soll Anregung erzeugen

$$\sum_{ll'} \vec{E}(t) \cdot \vec{d}_{ll'} \, a_l^+ a_{l'} = H_{el-Laser}$$

$\vec{E}(t)$ ist klassisch Feld

Frage: was kann man aus Lichtstreuung lernen?

im Detektor wird Photonzahl bzw. deren Änderungsrate gemessen:

$$\dot{c}^+_{\lambda k} = i\omega_{\lambda k} c^+_{\lambda k} + i g^{k\lambda}_{12} P_{12} \, , \qquad P_{12} = a_1^+ a_2$$

Quelle der Photon ist elektron. Übergangsamplitude $a_1^+ a_2$:

$$\frac{d}{dt} a_1^+ a_2 = \frac{i}{\hbar}\left[H_{el}^0 + H_{ph}^0 + H_{el-Licht} + H_{el-ph} , a_1^+ a_2 \right]$$

$$= -i\omega_0 a_1^+ a_2 + 0 + i\Omega(\underbrace{1 - 2a_2^+ a_2}_{\substack{a_1^+ a_1 - a_2^+ a_2 \\ = \text{Inversion}}}) +$$

$$\underbrace{\frac{i}{\hbar}\left[\hbar \sum_\alpha g_\alpha (b_\alpha^+ + b_\alpha) a_2^+ a_2 , a_1^+ a_2\right]}_{-i\sum_\alpha g_\alpha (b_\alpha^+ + b_\alpha) a_1^+ a_2} \equiv -i\phi(t) a_1^+ a_2$$

$$\phi(t) = \sum_\alpha g_\alpha (b_\alpha^+ + b_\alpha)$$

insgesamt: wenn $a_2^+ a_2 \Rightarrow 0$ (schwache Anregg.) braucht man für Lumineszenz!

<u>3.1. Gleich. f. Dipoldichte</u>

$$\dot{p}_{12} = -i\omega_0 p_{12} + i\Omega(t) - i\phi(t) p_{12}(t)$$

ist ein gedämpfte Oszillatorgleichg. mit Energiefluktuation $\phi(t)$

$$\sim -i(\underbrace{\omega_0 + \phi(t)}) p_{12}$$

Energie ω_0 + Energiefluktuation durch Phononen $\phi(t)$

wirkliche Operatorgleichg.: <u>$b_\alpha p_{12}$</u> $\sim \dot{p}_{12}$

formale Lösung:

$$p_{12}(t) = \underbrace{i\int_{-\infty}^{t} dt' e^{-i\omega_0(t-t')}}_{\text{freie Ausbreitung}} \Omega(t') - i\int_{-\infty}^{t} dt' e^{-i\omega_0(t-t')} \phi(t') p_{12}(t')$$

$$= i\int_{-\infty}^{t} dt' G_0(t-t')\Omega(t') - i\int_{-\infty}^{t} dt' G_0(t-t')\phi(t') p_{12}(t')$$

$$p_{12}(t) = \underset{\text{Lösg. ohne WW}}{p_{12}^{(0)}} + \int_{-\infty}^{t} dt' \, G_0(t-t') \, V(t') \, p_{12}(t')$$

$$-i\phi(t') \equiv V(t')$$

math. Struktur: $p_{12} = p_{12}^{(0)} + G_0 V p_{12}$ eine

Lippmann Schwinger Gleichung (Streutheorie)

Lösg. durch Iteration: $p_{12}^{(0)}$ sei bekannt, dann immer wieder auf rechte Seite einsetzen.

3.2. Iterative Lösung.

0.te Lsg: $p_{12}^{(0)}$ = von oben bekannt

1.-te Ordnung: $p_{12}^{(1)}(t) = p_{12}^{(0)}(t) + \int_{-\infty}^{t} dt' \, G_0(t-t') \, V(t') \, p_{12}^{(0)}(t')$

freie Lsg. $p_{12}^{(0)}$ „stößt" zur Zeit t' an $V(t')$ und breitet sich dann frei aus

Integral über alle mögl. WW-Zeiten t'

2.te Ordnung: $p_{12}^{(2)}(t) = p_{12}^{(0)}(t) + \int_{-\infty}^{t} dt' \, G_0(t-t') \, V(t') \, p_{12}^{(0)}(t')$

$$+ \int_{-\infty}^{t} dt' \, G_0(t-t') \, V(t') \int_{-\infty}^{t'} dt'' \, G_0(t'-t'') \, V(t'') \, p_{12}^{(0)}(t'')$$

usw.

jetzt Erwartungswertbildg. bzgl. der Phononen:

$$\langle p_{12} \rangle = sp\left(p_{12}(t) \, \rho(0) \right)$$

$$\rho(0) = \frac{1}{Z_{el}} e^{-\beta H_{el}} \cdot \frac{1}{Z_{ph}} e^{-\beta H_{ph}}$$

Spur über Phonon $\hat{=}$ $$\sum_{\{\alpha\}} \langle \{\alpha\} | \rho_{12}(t) \frac{1}{Z_{ph}} e^{-\beta H_{ph}} | \{\alpha\} \rangle$$

bis zur 2. Ordnung einsetzen

langsam Einhüllende

<u>0-te Ordnung:</u>

$$\rho_{12}^{(0)} = i \int_{-\infty}^{t} dt' \, e^{-i\omega_0(t-t')} e^{-i\omega_L t'} \tilde{\Omega}(t')$$

schnelle Oszillation

$\omega_L \ll \omega_0$ $\quad \approx i \frac{e^{-i\omega_L t}}{\omega_0 - \omega_L} \tilde{\Omega}(t)$

Anregg. unterhalb Resonanz

entsteht Linie in Lichtstreuung bei ω_L mit Breite der Einhüllenden

bei Ausführg. der Fouriertrafo.

„Rayleigh-Streuung"

<u>1-te Ordnung:</u> $\langle \{\alpha\} | V(t') | \{\alpha\} \rangle$ bei Spurbildg.

$$\sim \langle \{\alpha\} | \underbrace{\sum_{\beta} g_{\beta} (b_{\beta}^{+} + b_{\beta}) | \{\alpha\} \rangle}_{\text{orthogonal auf } \langle \{\alpha\} |} = 0$$

<u>2-te Ordnung:</u>

$$V(t')V(t'') \sim V(t_1)V(t_2)$$

$$\sim \sum_{\alpha_1\alpha_2} g_{\alpha_1} g_{\alpha_2} \left(b^+_{\alpha_1}(t_1) + b_{\alpha_1}(t_1)\right)\left(b^+_{\alpha_2}(t_2) + b_{\alpha_2}(t_2)\right)$$

wenn $\langle\{\alpha\}| \, V(t_1)V(t_2) \, |\{\alpha\}\rangle$

$$= \sum_{\alpha_1\alpha_2} g_{\alpha_1} g_{\alpha_2} \langle\{\alpha\}| \left(\underbrace{b_{\alpha_1} b^+_{\alpha_2}}_{\delta_{\alpha_1\alpha_2} + b^+_{\alpha_2} b_{\alpha_1}} + b^+_{\alpha_1} b_{\alpha_2} \right) |\{\alpha\}\rangle$$

$$= \sum_{\alpha} g_\alpha^2 \left\{ \underbrace{(1+n_\alpha)\, e^{-i\omega_\alpha(t_1-t_2)}}_{\text{Prozeß der Korrelation mit } e^{-i\omega_\alpha(t_1-t_2)}} + n_\alpha \, e^{i\omega_\alpha(t_1-t_2)} \right\}$$