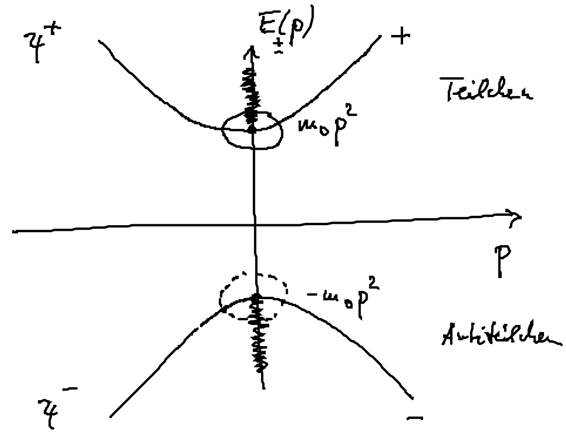
1.5. Ladung : Teilchen, Antiteilchen paar

Das Spektrum der K-G-Gl. $E_\pm(p)$:



verbotene Zone

(ellipse) = Schrödingergleichg. f. Teilchen

(dashed ellipse) = Schrödgl. f. Antiteilchen

wenn ρ als Ladungsdichte interpretiert werden soll so nehmen wir $q_\pm$ als Gesamtladung :

$$\boxed{q_\pm = \int d^3r \; e \; \rho_\pm(\vec{r},t)} \quad \text{Gesamtladung d. Teilchen } \psi_\pm$$

positive Elementarladung — aus Kontinuitätsgl. — $e\rho_\pm$: AW-LadungsD

Def. von $\rho_\pm$ einsetzen f. ψ_+, ψ_- als ebene Welle

$$\rho_\pm = \frac{\pm e}{m_0 c^2} \, |A_\pm(p)|^2 \, |E_\pm(p)| \, \underbrace{\int d^3r}_{L^3}$$

ist damit eine Bestimmungsgleichg. f. $|A_\pm(p)|^2$, wenn man $q_\pm$ vorgibt.

Interpretation von ψ_+ : Teilchen mit Ruhemasse m_0 und Ladung $q_+ > 0$

ψ_- : Antiteilchen mit Ruhemasse m_0 und Ladung $q_- < 0$

problematisch: 1 Gleichung f. 1 Teilchen beschreibt mehrere Teilchen
wird erst aufgelöst in Quantenfeldtheorie:
z.B. Paarerzeugg., WW Teilchen – Antiteilchen

wähle die Normierung: $$A_\pm(p) = \left(\underbrace{\frac{|q_\pm|}{e}} \frac{m_0 c^2}{|E(p)|\, L^3} \right)^{1/2} \equiv A(p)$$

d.h. reell f. beide Teilchen. z: Ladungszahl d. Bosons

Damit liegt ψ_+, ψ_- fest:

$$\psi_+ = A(p)\, e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r} - |E(p)|t)}, \quad \psi_- = A(p)\, e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r} + E(p)t)}$$

positiv geladen — negativ geladen

neutrales Teilchen:

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_+(p) + \psi_-(p) \right)$$

Rechnung zeigt, daß $q = 0$ ist wenn Def. von ρ angewendet wird.

(1.) Alle Ladungsfreiheitsgrade ψ_0, $\psi_\pm$ sind somit beschreibbar.

noch problematisch ist Interpretation von $E_\pm \gtrless 0$ (nicht Energie!)
kann nicht Teilchenenergie sein.

ÜA: $$H = \text{Energie} = \int d^3r\, \mathcal{H} \underset{\Uparrow \text{ÜA}}{=} \overbrace{\int d^3r}^{L^3} \frac{|A(p)|^2}{m_0 c^2} E^2(p)$$

mit $|A(p)|^2$ von oben, folgt Energie $= z\,|E(p)| > 0$,

das ist zumindest einigermaßen zufriedenstellend.

(2) Die geladen Teilch haben positive Energie $\langle E(p) \rangle > 0$.
(neutral)

1.6. kurze Anwendungen

a) Kernkräfte: Yukawa (1935) hat Modell f. Wechselwirkg. von Nukleonen (proton, neutron) aufgestellt

Pionentriplett: π_+, π_-, π_0 aus:

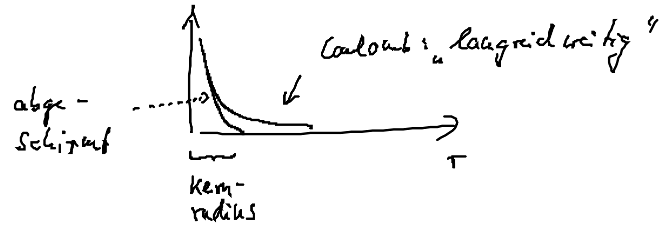
$$\left(\Box - \lambda_c^{-2} \right) \psi_n (\vec{r}, t) = 0 \quad \text{analog zu} \quad \Box \vec{A}(\vec{r}, t) = 0$$

$\oplus \sim\sim \bigcirc$ (p, n) $\qquad \ominus \sim\sim \ominus$ (e^-, e^-)

einfachste Lösung $\partial_t^2 \to 0$ (stationär)

$$\sim \frac{e^{-r/\lambda_c}}{r} \ \text{(Yukawa)} \qquad\qquad \sim \frac{1}{r} \ \text{(Coulomb)}$$

Unterschied ist Ruhemasse die Kernkräfte lokalisiert.



b) Teilchen / Antiteilchenwolke

relativist. Boson, geladen + $\underbrace{\text{Potential (Ion)}}_{\text{elektromagn. Feld}}$

klass. Mechanik: Renormierung v. Impuls und Energie im Maxwellfeld: $(\phi, \vec{A})$

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{E}_{i\hbar\partial_t} \to E - q\phi \;;\quad \underbrace{\vec{p}}_{\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}} \to \vec{p} - q\vec{A} \end{array}\right\} \text{einsetzen in relativistische E-Dispersion}$$

$$\boxed{\left(i\hbar\partial_t - q\phi\right)^2 \psi = \left\{c^2\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)^2 + m_0^2 c^4\right\}\psi}$$

Klein-Gordon-Gl. eines geladenen Teilchens im Feld $(\phi, \vec{A})$

einfachstes Bsp: positives Ion: $\phi(\vec{r})$, $\vec{A} = 0$
als statisches Coulombproblem

Ladungsdichte: $e\rho = \frac{i\hbar q}{2m_0c^2}\left(\psi^*\partial_t\psi - \psi\partial_t\psi^*\right) - \frac{q^2}{m_0c^2}\phi\psi^*\psi$

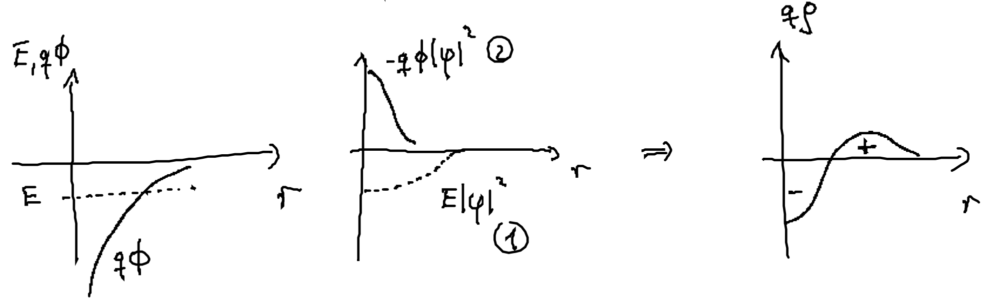
aus der Kontinuitätsgleichung

stationärer Ansatz $e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\varphi(\vec{r})$ (Separation d. Variablen)

$$e\rho = \frac{q}{m_0c^2}\left(\underset{1}{E} - q\underset{2}{\phi(\vec{r})}\right)\varphi^*(\vec{r})\,\varphi(\vec{r})$$

Ladungsdichte im stationären Ionpotential qualitativ ein gebundener Zustand diskutieren $\quad q < 0$

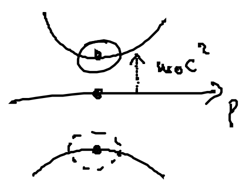
Annahme: $\quad E < 0$ f. gebundenen Zustand



Bemerkung: • $e\rho$ hat positive und negative Anteile, d.h.
Teilchen ist von Antiteilchenwolke umgeben
(−) (+)

• ist exp. an Pionatomen bestätigt

1.7. Grenzfall Schrödingergleichung



Schrödingertheorie muß durch Verschiebg. d. Koordinatensystems (E) gefunden werden

$$\Psi(\vec r,t) = \tilde\Psi(\vec r,t)\, e^{-i\frac{m_0 c^2}{\hbar}t}$$

Forderung um in ◯ zu bleiben:

$$\partial_t \tilde\Psi \ll \frac{m_0 c^2}{\hbar}\tilde\Psi \qquad (\tilde\Psi : \text{langsam})$$

einsetzen in K-G-Gl.:

$$\partial_t^2 \Psi(\vec r,t) = \partial_t\left\{\left(\partial_t \tilde\Psi - \frac{i m_0 c^2}{\hbar}\tilde\Psi\right) e^{-i\frac{m_0 c^2}{\hbar}t}\right\}$$

$$\left|\partial_t^2 \tilde{\psi}\right| \approx -i2\frac{m_0c^2}{\hbar}\partial_t\tilde{\psi} - \underbrace{\frac{m_0^2c^4}{\hbar^2}}_{c^2\lambda_c^{-2}}\tilde{\psi}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta + \lambda_c^{-2}\right)\psi = 0$$

$$\left(-i2\frac{m_0}{\hbar}\partial_t\tilde{\psi} - \Delta\tilde{\psi}\right) = 0$$

$$\boxed{i\hbar\,\partial_t\tilde{\psi} = -\frac{\hbar^2\Delta}{2m_0}\tilde{\psi} \quad \hat{=} \text{ Schrödgl. f. Feld}}$$

Antifeld analog (später) $\quad \psi(\vec{r},t) \Rightarrow \hat{\psi}(\vec{r},t)$ (später)

* 2. Klassische Feldtheorie zum Higgsmechanismus (nur Prinzip!)

Frage: woher kommen Massen?
einfachstes Bsp: Photon bekommt Masse (nicht realistisch aber einfachstes, didaktisch durchführbares Beispiel)

2.1. Freies masseloses Feld $\vec{A}$

Vektorpotential $\square\vec{A} = 0$, es fehlt $\lambda_c^{-2}\vec{A}$ um Masse zu erzeugen

$$\vec{E} = -\partial_t\vec{A}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \quad \text{im Vakuum}$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\vec{E}^2 - \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\sum_e\left(\partial_t A_e\right)^2 - \frac{1}{\mu_0}\sum_e\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)_e^2\right)$$

$e: x, y, z$

aus $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \partial_t A_i} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \partial_j A_i} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A_i}$

folgt $\Box \vec{A} = 0$, d.h. damit ist Wahl der Lagrangedichte bestätigt.

nach dem Einsetzen und mit μ_0 multiplizieren, Endzeile:

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2 A_i - \underbrace{\sum_j \partial_j^2 A_i}_{\Delta A_i} + \underbrace{\partial_i \sum_j \partial_j A_j}_{\partial_i \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}}_{=0}} = 0$$

Masseterm ist nicht dabei! Um Masse zu bekommen:

$$\underbrace{\Box \vec{A} = \left(\frac{M_0 c}{\hbar}\right)^2 \vec{A}}_{\to \text{ müßte erzeugt werden}}$$

in $\mathcal{L}_0$ müßte man Term mit $\vec{A}^2$ hinzufügen,

dann $\mathcal{L}_0 \to \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{Kontakt}}$ mit

$$\mathcal{L}_{\text{Kontakt}} \sim \alpha \vec{A}^2, \text{ so: } \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{Kon}}}{\partial \vec{A}} = 2\alpha \vec{A}$$

quadratische Terme in $\vec{A}^2$ in der Lagrangedichte sorgen f. Masse!

Idee Higgs: Einführg. eines weiteren Feldes φ in $\mathcal{L}$
φ erfüllt den ganzen Raum und WW mit $\vec{A}$.
Hoffng: φ ändert den Lagrangian von $\vec{A}$ und bringt Masse.

2.2. Wechselwirkende Klein-Gordon-Felder $\quad \vec{p} \to \vec{p} - q\vec{A}$

$\vec{A}$ z.B. elektromagn. Feld in WW mit geladenem Feld φ

$$\mathcal{L}_\varphi = \frac{\hbar^2}{2m_0}\left[\partial_{ct}\varphi\,\partial_{ct}\varphi - \lambda_c^{-2}\varphi^2\right] \qquad \text{freies } \varphi$$

$$\mathcal{L}_W = \frac{1}{2m_0}\left[\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)\varphi\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + q\vec{A}\right)\varphi\right] \qquad \text{WW von } \varphi \text{ mit } \vec{A}$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\left(\sum_i \varepsilon_0\left(\dot{A}_i\right)^2 + \sum_i \mu_0^{-1}\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)_i^2\right) \qquad \text{Photonfeld}$$

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\varphi + \mathcal{L}_W + \mathcal{L}_0$, Lagrgl. einsetzen:

$$\underbrace{\Box\vec{A}}_{\text{aus } \mathcal{L}_0} = -\mu_0 \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}_W}{\partial\vec{A}}}_{\vec{\nabla}_A} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{quadratischer Term}}}{=} +\mu_0\frac{\partial\frac{1}{2m_0}q^2\vec{A}^2\varphi^2}{\partial\vec{A}} = \underbrace{\mu_0\frac{q^2\varphi^2\vec{A}}{m_0}}_{\text{Masseterm}}$$

aber im Vakuum: $\varphi = 0$ f. klass. Feld und
damit verschwindet der Masseterm
Idee: Selbst-WW des Higgsfelds $\mathcal{L}_{\text{SelbstWW}} \sim \varphi^4$