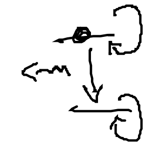
V Wechselwirkende Quantenfelder: Elektron – Photon WW



virtuelle Prozesse $\hat{=}$ Energieverschiebg.

reelle Prozesse $\hat{=}$ Zustandsänderg.

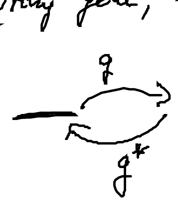
prinzipiell mögl. f. allg. Fermion - Boson WW

1. Aufhebung von Entartungen durch das Vakuumfeld

a) Idee: Elektronen sind immer umgeben von den Moden des em. Felds selbst wenn $\langle n_{\lambda k} \rangle = 0$ (Photonzahl $= 0$) sind virtuelle Prozesse mögl. weil man immer Photon emittieren kann und wieder reabsorbieren (nach Energie-Zeit Unschärfe)

Zwei Effekte:
- Aufhebg. v. Energieentartg.: H Atom (l-Zustände)
- Masserenormierung durch die Umgebung (in Exp ist das Vakuumfeld immer da: „nackte" Elektronen können nicht gemessen werden)

b) Störungstheorie um Wirkg. d. Vakuums auf Energieniveaus zu betrachten müssen bis 2. Ordng gehen, 1. Ordng. zeigt kein Effekt



$(g^2 \hat{=}$ 2. Ordng.$)$

$\Delta E_n \hat{=}$ Energieverschiebg. eines Zustands / Orbital $|n\rangle$

ungestörte Wellenfunktion:

$$|\varphi^{\text{Photon}}_{\text{Elektr}}\rangle = \text{Produktfkt. aus Photon / Elektron} \hat{=}$$

$$\left|\begin{matrix}1 \cdots & n & n+1 \cdots \\ 0 - & 1 & 0 \cdots 0\end{matrix}\right\rangle \left|\begin{matrix} k_1\lambda_1(k_1) & k_1\lambda_2(k_1) & \cdots & k_i\,\lambda_1(k_i)\lambda_2(k_i) \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \quad 0\end{matrix}\right\rangle$$

1 El in Zustand n — kein Photon in Mode $k\lambda$

„Elektr im Orbital" — „Vakuum"

$$\Delta\varepsilon_n^{(1)} = \langle\varphi^{ph}_{El}|\,H_{WW}\,|\varphi^{ph}_{El}\rangle = \langle n, 0Ph\,|\,H_{WW}\,|\,n, 0Ph\rangle$$

$$\Delta\varepsilon_n^{(2)} = \sum_X \frac{|\langle n, 0\,Ph\,|\,H_{WW}\,|X\rangle|^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_X}$$

$|X\rangle$: alle mögl. Zustände mit 1 Elektr und Photonzahlen

Wechselwirkungsoperator: bisher „$-q\vec{r}\cdot\vec{E}$" Dipol WW ist ungeeignet für die Renormierg. eines freien Elektrons, daher:

$$H^{(1)}_{WW} = \frac{1}{2m_0}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{2m_0}\left(\vec{p}^{\,2} - q(\underline{\vec{p}\cdot\vec{A}} + \vec{A}\cdot\vec{p}) + q^2\vec{A}^2\right)$$

2 Beiträge nach Produktregel — weglassen höhere Terme in wirklichen WW, RWA

wirkt auf Wellenfunktion

$$= \frac{1}{2m_0}\vec{p}^{\,2} - \frac{q}{2m_0}\vec{A}\cdot\vec{p}\;\cdot 2$$

wegen Produktregel, $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \hat{=} \vec{p}\cdot\vec{A} = 0$ Coulombeichg.

$$H^{(1)}_{WW} = -\frac{q}{m_0}\vec{A}\cdot\vec{p}$$

stationäre Schrödinger Störungstheorie

$$\vec{A} = \sum_{\lambda k} f_k\,\vec{e}_{\lambda(k)}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,c_{\lambda k}\cancel{(t)} + \text{h.a.}$$ (Quantisierg. Strahlungsfeld VL)

$$H_{ww}^{(2)} = -\sum_{\substack{n_1 n_2\\ \lambda k}} \hbar\, g^{\lambda k}_{n_1 n_2} \left(a^+_{n_1} a_{n_2} c_{\lambda k} + h.a. \right)$$

$$g^{\lambda k}_{n_1 n_2} = \frac{q}{m_0} \left(2\hbar \omega_k \varepsilon_0 V \right)^{-1/2} \int d^3r\, \varphi^*_{n_1}(\vec r)\, \vec e_{\lambda(k)} \cdot \vec p\, \varphi_{n_2}(\vec r)\, \underline{e^{i\vec k \cdot \vec r}}$$

n_i = Schr. Quantenzahl d. Elektrons

$= 1$ in Dipolnäherung.

<u>1. Ordng Störungstheorie:</u>

$$\langle {}^{n}_{1} | \langle {}^{\{\lambda k\}}_{0} | H_{ww} | {}^{n}_{1} \rangle | {}^{\{\lambda k\}}_{0} \rangle \sim$$

$$\langle {}^{n}_{1} | a^+_{n_1} a_{n_2} | {}^{n}_{1} \rangle \langle {}^{\{\lambda k\}}_{0} | c^{(+)}_{\lambda k} | {}^{\{\lambda k\}}_{0} \rangle = 0$$

Null Photon

weil kein Überlapp zwischen d. Photonzustände hergestellt werden kann.

<u>2. Ordng.</u> $|X\rangle = ? = | \cdots {}^{\{\lambda k\}}_{0,1,2\cdots} \cdots \rangle | \cdots {}^{n'}_{1} \cdots \rangle$

Photon: Moden können besetzt sein

1 Elektron kann in allen anderen Orbitalen sein

$\langle {}^{n}_{1} | \langle {}^{\{\lambda k\}}_{0} | H_{ww} | X \rangle$ ist gesucht f. 2. Ordng.:

$$H_{ww} \sim a^+_{n_1} a_{n_2} c^{(+)}_{\lambda k}$$

$\uparrow$ $|X\rangle$ muß n_2 enthalten und 1 Photon zuständ

$\Rightarrow |X\rangle = | {}^{n_2}_{1} \rangle | {}^{\lambda k}_{1} \rangle$

$$\Delta \varepsilon_n = \sum_{\substack{n_1 n_2 \\ \lambda k}} \frac{\left| \langle {}^n_1 | \langle {}^{\{\lambda k\}}_0 | a^+_{n_1} a_{n_2} c_{\lambda k} | {}^{n_2}_1 \rangle | {}^{\{\lambda k\}}_1 \rangle \hbar g^{\lambda k}_{n_1 n_2} \right|^2}{\varepsilon_n - \underbrace{(\varepsilon_{n_2} + \hbar\omega_{\lambda k})}_{\varepsilon_X}}$$

1 Photon

mit $\langle {}^n_1 | a^+_{n_1} a_{n_2} | {}^{n_2}_1 \rangle \neq 0$ für $\delta_{n n_1}$

$$= \sum_{\substack{n_2 \\ \lambda k}} \frac{|g^{\lambda k}_{n n_2}|^2 \hbar^2}{\varepsilon_n - (\varepsilon_{n_2} + \hbar\omega_{\lambda k})}$$

$$\boxed{\Delta \varepsilon_n = \sum_{n' \lambda k} \frac{|g^{\lambda k}_{n n'}|^2 \hbar^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_{n'} - \hbar\omega_{\lambda k}}}$$

2. Ordg. Störungstheorie f. Energieverschiebung der n-ten Orbitale

g einsetzen und berechnen:

$$\Delta \varepsilon_n = \sum_{n', \lambda, k} \frac{q^2}{m_0} \frac{\hbar}{2 m \omega_k \varepsilon_0 V} |\vec{p}_{nn'} \cdot \vec{e}_{\lambda}(k)|^2 \frac{1}{\varepsilon_n - \varepsilon_{n'} - \hbar\omega_{\lambda k}}$$

freier Raum: Kugelkoordinaten f. $\vec{k}$ - Summe; Winkel ϑ, φ : Ω

$$= \sum_{n'} \frac{\cancel{V}}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk\, k^2 \sum_\lambda \underbrace{\int \underbrace{d\Omega}_{\text{Winkel}} \frac{|\vec{p}_{nn'} \cdot \vec{e}_{\lambda}(k)|^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_{n'} - \hbar\omega_{\lambda k}}}_{\frac{8\pi}{3} \text{ (ohne Beweis)}} \frac{q^2 \hbar}{2\omega_{\lambda k} \varepsilon_0 \cancel{V} m_0^2}$$

$\omega = ck$ als Variable

$$= \frac{1}{6\pi^2}\,\frac{q^2\hbar^2}{\varepsilon_0 m_0^2 c^3}\int_0^\infty d\omega\,\omega \sum_{n'} \frac{|p_{nn'}|^2}{\varepsilon_n-\varepsilon_{n'}-\hbar\omega}$$

Problem: für $\omega \to \infty$: $\int_0^\infty d\omega\,\omega\,\frac{1}{\omega} \to \int_0^\infty d\omega \to \infty$

das würde einer ∞ Energieverschiebung entsprechen.

dieses Problem tritt schon bei freien Elektronen auf!

<u>Idee Bethe:</u> wir verpacken die ∞ Kräfte in eine nackte Masse die einem Experimentator <u>nicht</u> zugänglich sind

<u>c/ freies Elektron:</u> Massenrenormierung.

$$|n\rangle_{\text{Elektron}} = |k\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\langle n|\hat{\vec{p}}|n'\rangle \to \langle k|\hat{\vec{p}}|k'\rangle = \int d^3r\,\frac{1}{\sqrt{V}}\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\,e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}}\,\frac{1}{\sqrt{V}}$$

$$= \hbar k\,\delta_{kk'}$$

$$\Delta\varepsilon_k^{(\text{frei})} = \frac{1}{6\pi^2}\,\frac{q^2\hbar}{\varepsilon_0 m_0^2 c^3}\int_0^\infty d\omega\,\omega\sum_{k'}\frac{(\hbar k)^2\,\delta_{kk'}}{\varepsilon_k-\varepsilon_{k'}-\hbar\omega}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{-(\hbar k)^2 \int_0^\infty \frac{d\omega}{\hbar} \;\to\; \infty}$$

$$= -\frac{4}{3}\,\frac{E^{el}_{kin}}{E^{el}_{Ruhe}}\,\alpha \int_0^\infty d(\hbar\omega) \;=\; -E^{el}_{kin}\cdot\beta$$

$$E^{el}_{kin} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} \qquad E_{Ruhe} = m_0 c^2 \qquad \alpha = \frac{1}{137}$$

$$\underline{\varepsilon^{\text{gemessen}}_k} = \underbrace{\varepsilon^0_k}_{\text{nackt. Elektron}} + \Delta\varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{nackt}} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0}\,\beta \equiv \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0}$$

m_0: gemessene Masse

$$\frac{1}{m_{nackt}} = \frac{1}{m_0}(1+\beta)$$

m_{nackt}: ohne Vakuum $\qquad$ m_0: mit Vakuum

<u>Idee:</u> Renormierg. der Theorie indem Formulierg. die gemessene Masse m_0 verwendet

d) Anwendg. auf gebund. Elektron

$$H_{naiv} = \underbrace{\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m_{nackt}} + V(\vec{r})}_{\text{Atomproblem}} + \underbrace{H_{el-photon}}_{\text{später}}$$

m_{nackt} wird f. die gemessene gehalten

$$H\Big|_{\text{renormiert}} = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m_0}\,1 + V(\vec{r}) + \underbrace{H_{\text{el-phot}} + \beta\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m_0}}_{\text{Renormierte El-Phot WW}}$$

$2m_0 \nearrow$ Expert

$$\frac{\beta\vec{p}^{\,2}}{2m_0} \text{ muß als weitere Störg. mitgenommen werden}$$

$$\frac{\beta}{2m_0} = \frac{1}{6\pi^2}\frac{q^2\hbar}{\varepsilon_0 m_0^2 c^3}\int d\omega \rightarrow \dots \int d\omega\,\omega\,\frac{1}{\omega}$$

+ Störgtheorie in $\vec{p}^{\,2}$ in 1. Ordng. : $\langle n|\vec{p}^{\,2}|n\rangle$

$$\Delta\tilde{\varepsilon}_n = \frac{1}{6\pi^2}\frac{q^2\hbar}{\varepsilon_0 m_0^2 c^3}\int_0^\infty d\omega\,\omega\left(\sum_{n'}\frac{|p_{nn'}|^2}{\varepsilon_n-\varepsilon_{n'}-\hbar\omega} + \frac{\langle n|\vec{p}^{\,2}|n\rangle}{\hbar\omega}\right)$$

$\nearrow$ renormiert

$$\langle n|\vec{p}^{\,2}|n\rangle = \sum_{n'}\langle n|p|n'\rangle\langle n'|\vec{p}|n\rangle = \sum_{n'}|p_{nn'}|^2$$

$$\Delta\tilde{\varepsilon}_n = \frac{4}{3}\,\alpha\,\frac{1}{E_{\text{Ruhe}}}\int_0^\infty d(\hbar\omega)\,\cancel{\hbar\omega}\sum_{n'}\frac{|p_{nn'}|^2}{2m_0}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{\varepsilon_n-\varepsilon_{n'}-\hbar\omega}}_{\text{alt}} + \underbrace{\frac{1}{\hbar\omega}}_{\text{neu}}\Bigg)$$

$$\Delta\tilde{\varepsilon}_n = \frac{4}{3}\alpha\frac{1}{E^{el}_{Ruh}}\int_0^\infty d(\hbar\omega)\sum_{n'}\frac{|p_{nn'}|^2}{2m_0}\frac{(\varepsilon_n-\varepsilon_{n'})}{(\varepsilon_n-\varepsilon_{n'}-\hbar\omega)} \quad \overbrace{\frac{\varepsilon_n-\varepsilon_{n'}}{(\varepsilon_n-\varepsilon_{n'}-\hbar\omega)(\cancel{\hbar\omega})}}$$

für groß ω : Integrand $\frac{1}{\omega} \to \ln\omega$

ist also immer noch ein ln Divergenz :

aber : für hohe Frequenzen $\hbar\omega > m_0c^2$ findet keine WW mit Strahlfeld statt (VL relativ. QM)

weil Feld nur auf die Compton λ lokalisiert werden kann

$$\int_0^\infty \to \int_0^{m_0c^2}$$

$$\Delta\tilde{\varepsilon}_n = \frac{4}{3}\alpha\frac{1}{E_{Ruhe}}\underbrace{\sum_{n'}\frac{|p_{nn'}|^2}{2m_0}(\varepsilon_{n'}-\varepsilon_n)}_{\frac{q^2\hbar^2}{2\varepsilon_0}|\varphi_n(0)|^2}\;\underbrace{\ln\left|\frac{m_0c^2}{\varepsilon_n'-\varepsilon_n}\right|}_{10^5 \text{ weil Ruheenergie sehr hoch ist}}$$

(durch Auswertg. der Summe nach Bethe : technisch)

<u>Bemerkungen</u> :

– Energieverschiebg. in zweiter Ordnung für Atom :

$$\Delta \tilde{E}_n \;\hat{=}\; 10^5 \, \alpha \, \frac{E_{Ryd} \cdot \text{Lokalisierungsenergie}}{E_{Ruh}}$$: nur f. Zustände mit Wellenfkt. $\varphi_n(\vec{r}=0) \neq 0$

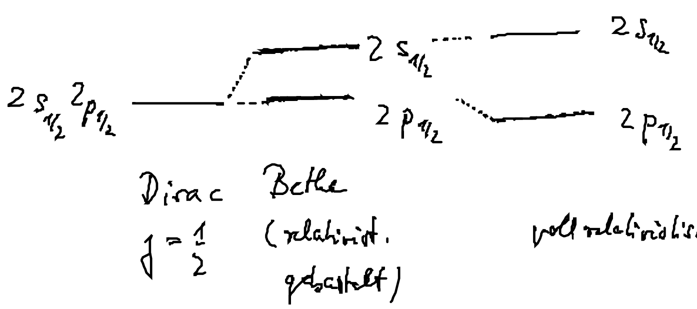
n Quantenzahl

- die Aufenthaltswahrscheinlichkeit am Atom $\vec{r}=0$ muß $\neq 0$ sein

- H-Atom: nur s-Zustände werden verschoben,
  „bildet ein Dipol bei $\vec{r}=0$ mit dem Kern"

E_{nj} , Ψ_{nljm_j} : l und m_j entartet nach Diracgleichg.

$\longrightarrow$ Aufhebg. der Entartg. bzgl. $l=0$ (s-Zustände)
diese werden verschoben:



1949: Messg. Willis Lamb (10^3 MHz)

- unterdessen mußte anerkannt werden, daß man zwischen nackter und gemessener Masse unterscheiden muß.