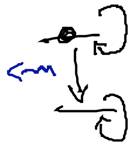
V Wechselwirkende Quantenfelder: Elektron – Photon WW



prinzipiell möglich. virtuelle Prozesse ≙ Energieverschiebg.

reelle Prozesse ≙ Zustandsänderg.

allg. Fermion - Boson WW

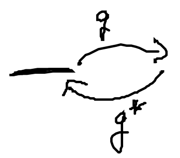
1. Aufhebung von Entartungen durch das Vakuumfeld

a) Idee: Elektron sind immer umgeben von den Moden des em. Felds selbst wenn $\langle n_{\lambda k} \rangle = 0$ (Photonzahl $= 0$) sind virtuelle Prozesse mögl. weil man immer Photon emittieren kann und wieder reabsorbieren

(nach Energie-Zeit Unschärfe)

Zwei Effekte:
- Aufhebg. v. Energieentartg.: H Atom (l-Zustände)
- Massenrenormierung durch die Umgebung (im Exp ist das Vakuumfeld immer da: „nackte" Elektronen können nicht gemessen werden)

b) Störungstheorie um Wirkg. d. Vakuums auf Energieniveaus zu behandeln müssen bis 2. Ordng gehen, 1. Ordng. zeigt kein Effekt



(g^2 ≙ 2. Ordng.)

ΔE_n ≙ Energieverschiebg. eines Zustands / Orbital $|n\rangle$

ungestörte Wellenfunktion:

$$|\varphi^{\text{Photon}}_{\text{Elektr}}\rangle = \text{Produktfkt. aus Photon / Elektron} \;\hat{=}$$

$$\left|{}^{1 \,\cdots\, n \;\; n+1 \,\cdots}_{0 \,\cdots\, 1 \;\;\; 0 \,\cdots\, 0}\right\rangle \left|{}^{k_1\lambda_1(k_1) \;\; k_1\lambda_2(k_1) \;\cdots\; k_i\lambda_1(k_i)\lambda_2(k_i)\cdots}_{\;\;0 \qquad\qquad 0 \qquad \cdots \qquad 0 \qquad\quad 0}\right\rangle$$

1 El im Zustand n „Elektr im Orbital"

kein Photon in Mode kλ „Vakuum"

$$\Delta\mathcal{E}_n^{(1)} = \langle \varphi^{ph}_{El} | \, H_{WW} \, | \varphi^{ph}_{El} \rangle = \langle n, 0Ph \,|\, H_{WW} \,|\, n, 0Ph \rangle$$

$$\Delta\mathcal{E}_n^{(2)} = \sum_X \frac{|\langle n, 0\,Ph \,|\, H_{WW} \,|X\rangle|^2}{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_X}$$

$|X\rangle$: alle mgl. Zustände mit 1 Elektr und Photonzahlen

Wechselwirkungsoperator: bisher „$-q\vec{r}\cdot\vec{E}$" Dipol WW ist ungeeignet für die Renormierung eines freien Elektrons, daher:

$$H_{WW}^{(1)} = \frac{1}{2m_0}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{2m_0}\Big(\vec{p}^{\,2} - q(\underbrace{\vec{p}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{p}}_{\text{2 Beiträge nach Produktregel}}) + \underbrace{q^2\vec{A}^2}_{\downarrow\ \text{weglassen höhere Terme in wirklichen WW, RWA}}\Big)$$

wirkt auf Wellenfunktion

$$= \frac{1}{2m_0}\vec{p}^{\,2} - \frac{q}{2m_0}\vec{A}\cdot\vec{p}\;\cdot 2$$

wegen Produktregel, $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \;\hat{=}\; \vec{p}\cdot\vec{A} = 0$ Coulombeichg.

$$H_{WW}^{(1)} = -\frac{q}{m_0}\vec{A}\cdot\vec{p}$$

stationäre Schrödinger Störungstheorie

$$\vec{A} = \sum_{\lambda k} f_k \, \vec{e}_{\lambda(k)} \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \, c_{\lambda k}\cancel{(t)} + \text{h.a.} \quad (\text{Quantisiertes Strahlungsfeld VL})$$

$$H_{WW}^{(2)} = -\sum_{\substack{n_1 n_2 \\ \lambda k}} \hbar\, g^{\lambda k}_{n_1 n_2} \left(a^+_{n_1} a_{n_2} c_{\lambda k} + h.a. \right)$$

$$g^{\lambda k}_{n_1 n_2} = \frac{q}{m_0} \left(2\hbar \omega_k \varepsilon_0 V \right)^{-1/2} \int d^3r\, \varphi^*_{n_1}(\vec{r})\, \vec{e}_{\lambda(k)} \cdot \vec{p}\, \varphi_{n_2}(\vec{r})\, \underline{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}$$

n_j = Schr. Quantenzahl d. Elektrons

$= 1$ in Dipol-näherung.

<u>1. Ordnung Störungstheorie:</u>

$$\langle {}^n_1 | \langle {}^{\{\lambda k\}}_0 | H_{WW} | {}^n_1 \rangle | {}^{\{\lambda k\}}_0 \rangle \sim$$

$$\langle {}^n_1 | a^+_{n_1} a_{n_2} | {}^n_1 \rangle \langle {}^{\{\lambda k\}}_0 | c^{(+)}_{\lambda k} | {}^{\{\lambda k\}}_0 \rangle = 0$$

Null Photon

weil kein Überlapp zwischen d. Photonzustände hergestellt werden kann.

<u>2. Ordnung.</u> $|X\rangle = ? = | \cdots {}^{\{\lambda k\}}_{0,1,2\cdots} \cdots \rangle | \cdots {}^{n'}_1 \cdots \rangle$

Photon: Moden können besetzt sein

1 Elektron kann in allen anderen Orbitalen sein

$\langle {}^n_1 | \langle {}^{\{\lambda k\}}_0 | H_{WW} | X \rangle$ ist gesucht f. 2. Ordnung:

$$H_{WW} \sim a^+_{n_1} a_{n_2} c^{(+)}_{\lambda k}$$

$\uparrow$ $|X\rangle$ muß n_2 enthalten und 1 Photonzustand

$\Rightarrow |X\rangle = | {}^{n_2}_1 \rangle | {}^{\lambda k}_1 \rangle$

$$\Delta \varepsilon_n = \sum_{\substack{n_1 n_2 \\ \lambda k}} \frac{\left| \langle {}^{n}_{1} | \langle {}^{\{\lambda k\}}_{0} | a^+_{n_1} a_{n_2} c_{\lambda k} | {}^{n_2}_{1} \rangle | {}^{\{\lambda k\}}_{1} \rangle \hbar g^{\lambda k}_{n_1 n_2} \right|^2}{\varepsilon_n - \underbrace{(\varepsilon_{n_2} + \hbar\omega_{\lambda k})}_{\varepsilon_X}}$$

1 Photon

mit $\langle {}^{n}_{1} | a^+_{n_1} a_{n_2} | {}^{n_2}_{1} \rangle \neq 0$ für $\delta_{n n_1}$

$$= \sum_{\substack{n_2 \\ \lambda k}} \frac{|g^{\lambda k}_{n n_2}|^2 \hbar^2}{\varepsilon_n - (\varepsilon_{n_2} + \hbar\omega_{\lambda k})}$$

$$\boxed{\Delta \varepsilon_n = \sum_{n' \lambda k} \frac{|g^{\lambda k}_{n n'}|^2 \hbar^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_{n'} - \hbar\omega_{\lambda k}}}$$

2. Ordg. Störgstheorie
f. Energieverschiebg.
der n-ten Orbitals

g einsetzen und berechnen.

$$\Delta \varepsilon_n = \sum_{n', \lambda, k} \frac{q^2}{m_0} \frac{\hbar}{2 m \omega_k \varepsilon_0 V} \left| \vec{p}_{nn'} \cdot \vec{e}_{\lambda(k)} \right|^2 \frac{1}{\varepsilon_n - \varepsilon_{n'} - \hbar\omega_{\lambda k}}$$

freier Raum: Kugelkoordinaten f. $\vec{k}$ - Summe

Winkel ϑ, φ : Ω

$$= \sum_{n'} \frac{\cancel{V}}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk\, k^2 \sum_\lambda \underbrace{\underbrace{\int d\Omega}_{\text{Winkel}}}_{\frac{8\pi}{3}} \frac{\left| \vec{p}_{nn'} \cdot \vec{e}_{\lambda(k)} \right|^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_{n'} - \hbar\omega_{\lambda k}} \frac{q^2 \hbar}{2\omega_{\lambda k} \varepsilon_0 \cancel{V} m_0^2}$$

(ohne Beweis)

$\omega = ck$ als Variable

$$= \frac{1}{6\pi^2} \frac{q^2\hbar^2}{\varepsilon_0 m_0^2 c^3} \int_0^\infty d\omega\, \omega \sum_{n'} \frac{|p_{nn'}|^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_{n'} - \hbar\omega}$$

Problem: für $\omega \to \infty$: $\int_0^\infty d\omega\, \omega \frac{1}{\omega} \to \int_0^\infty d\omega \to \infty$

das würde ein ∞ Energieverschiebung entsprechen.

dieses Problem tritt schon bei freien Elektronen auf!

<u>Idee Bethe</u>: wir verpacken die ∞ Kräfte in eine nackte Masse die einem Experimentator <u>nicht</u> zugänglich sind

<u>c/ freies Elektron</u>: Massenrenormierung.

$$\underset{\text{Elektron}}{|n\rangle} = |k\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\langle n | \vec{p} | n' \rangle \to \langle k | \vec{p} | k' \rangle = \int d^3r \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}} \frac{1}{\sqrt{V}}$$

$$= \hbar k\, \delta_{kk'}$$

$$\Delta\varepsilon_k^{(frei)} = \frac{1}{6\pi^2} \frac{q^2\hbar}{\varepsilon_0 m_0^2 c^3} \int_0^\infty d\omega\, \omega \sum_{k'} \frac{(\hbar k)^2 \delta_{kk'}}{\varepsilon_k - \varepsilon_{k'} - \hbar\omega}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{-(\hbar k)^2 \int_0^\infty \frac{d\omega}{\hbar} \;\to\; \infty}$$

$$= -\frac{4}{3} \frac{E_{kin}^{el}}{E_{Ruhe}^{el}} \alpha \int_0^\infty d(\hbar\omega) = -E_{kin}^{el} \cdot \beta$$

$$E_{kin}^{el} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} \qquad E_{Ruh} = m_0 c^2 \qquad \alpha = \frac{1}{137}$$

$$\underline{\varepsilon_k^{gemessen}} = \underbrace{\varepsilon_k^0}_{\text{nackt Elektron}} + \Delta\varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{nackt}} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0}\beta \equiv \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0}$$

gemessene Masse

$$\frac{1}{m_{nackt}} = \frac{1}{m_0}(1+\beta)$$

m_{nackt}: ohne Vakuum; m_0: mit Vakuum

<u>Idee:</u> Renormierg. der Theorie indem Formulierg. die gemessene Masse m_0 verwendet

<u>d) Anwendg. auf gebund. Elektron</u>

$$H_{naiv} = \underbrace{\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m_{nackt}} + V(\vec{r})}_{\text{Atomproblem}} + \underbrace{H_{el\text{-}photon}}_{\text{später}}$$

m_{nackt} wird f. die gemessene gehalten

$$H\Big|_{\text{renormiert}} = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m_0}\,1 + V(\vec{r}) + \underbrace{H_{el\text{-}phot} + \beta\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m_0}}_{\text{Renormierte El-Phot WW}}$$

$\nearrow$ Expert

$\frac{\beta\vec{p}^{\,2}}{2m_0}$ muß als weitere Störg. mitgenommen werden

$$\frac{\beta}{2m_0} = \frac{1}{6\pi^2}\frac{q^2\hbar}{\varepsilon_0 m_0^2 c^3}\int d\omega \;\to\; \dots \int d\omega\,\omega\,\frac{1}{\omega}$$

+ Störptheorie in $\vec{p}^{\,2}$ in 1. Ordnug. : $\langle n|\vec{p}^{\,2}|n\rangle$

$$\Delta\tilde{\varepsilon}_n = \frac{1}{6\pi^2}\frac{q^2\hbar}{\varepsilon_0 m_0^2 c^3}\int_0^\infty d\omega\,\omega\left(\sum_{n'}\frac{|p_{nn'}|^2}{\varepsilon_n-\varepsilon_{n'}-\hbar\omega} + \frac{\langle n|\vec{p}^{\,2}|n\rangle}{\hbar\omega}\right)$$

$\nearrow$ renormiert

$$\langle n|\vec{p}^{\,2}|n\rangle = \sum_{n'}\langle n|\vec{p}|n'\rangle\langle n'|\vec{p}|n\rangle = \sum_{n'}|p_{nn'}|^2$$

$$\Delta\hat{\varepsilon}_n = \frac{4}{3}\alpha\frac{1}{E_{Ruh}}\int_0^\infty d(\hbar\omega)\,\cancel{\hbar}\omega\sum_{n'}\frac{|p_{nn'}|^2}{2m_0}\Big(\underbrace{\frac{1}{\varepsilon_n-\varepsilon_{n'}-\hbar\omega}}_{\text{alt}} + \underbrace{\frac{1}{\hbar\omega}}_{\text{neu}}\Big)$$

$$\Delta \tilde{\mathcal{E}}_n = \frac{4}{3}\,\alpha\,\frac{1}{E^{el}_{Ruh}} \int_0^\infty d(\hbar\omega) \sum_{n'} \frac{|p_{nn'}|^2}{2m_0}\,\frac{(\mathcal{E}_n-\mathcal{E}_{n'})}{(\mathcal{E}_n-\mathcal{E}_{n'}-\hbar\omega)} \qquad \overbrace{\frac{\mathcal{E}_n-\mathcal{E}_{n'}}{(\mathcal{E}_n-\mathcal{E}_{n'}-\hbar\omega)\cancel{(\hbar\omega)}}}$$

für großes ω : Integrand $\frac{1}{\omega} \to \ln\omega$

ist also immer noch eine ln Divergenz:

aber: für hohe Frequenzen $\hbar\omega > m_0 c^2$ findet keine

WW mit Strahlungsfeld statt (vgl. relativ. QM)

weil Feld nur auf die Compton λ lokalisiert werden kann

$$\int_0^\infty \to \int_0^{m_0c^2}$$

$$\Delta \tilde{\mathcal{E}}_n = \frac{4}{3}\,\alpha\,\frac{1}{E_{Ruhe}} \underbrace{\sum_{n'} \frac{|p_{nn'}|^2}{2m_0}(\mathcal{E}_{n'}-\mathcal{E}_n)}_{\frac{q^2\hbar^2}{2\mathcal{E}_0}|\varphi_n(0)|^2} \underbrace{\ln\left|\frac{m_0c^2}{\mathcal{E}_n'-\mathcal{E}_n}\right|}_{10^5}$$

(durch Auswertg. der Summe nach Bethe: technisch)

10^5 weil Ruheenergie sehr hoch ist

<u>Bemerkungen</u>:

- Energieverschiebg. in zweiter Ordnung für Atom:

$$\Delta \tilde{E}_n \;\hat{=}\; 10^5 \alpha \, \frac{E_{Ryd} \cdot \text{Lokalisierungsenergie}}{E_{Ruhe}}$$: nur f. Zustände mit Wellenfkt. $\varphi_n(\vec{r}=0) \neq 0$

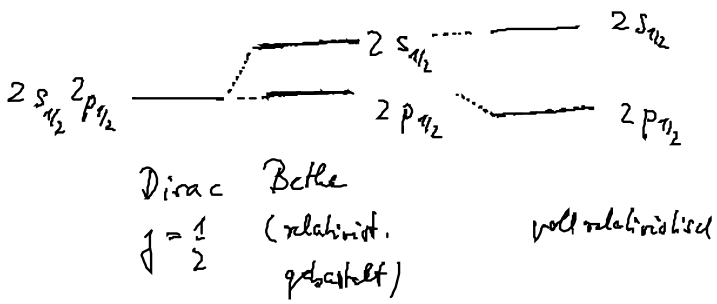
n Quantenzahl

- die Aufenthaltswahrscheinlichkeit am Atom $\vec{r}=0$ muß $\neq 0$ sein
- H-Atom: nur s-Zustände werden verschoben, „bilden ein Dipol bei $\vec{r}=0$ mit dem Kern"

E_{nj}, Ψ_{nljm_j} : l und m_j entartet nach Diracgleichg.

$\longrightarrow$ Aufhebg. der Entartg. bzgl. $l=0$ (s-Zustände)

diese wird verschoben:



1949: Messg. Willis Lamb (10^3 MHz)

- Unterschied muß anerkannt werden, daß man zwischen nackter und gemessener Masse unterscheiden muß.