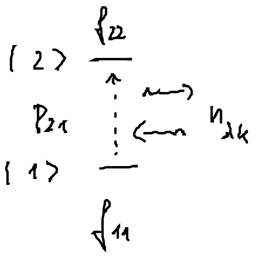
2. Zweiniveausystem und quantisiertes Feld

Zweiniveausystem (ZNS) f. elektronische System + vollquantisiertes Feld in niedrigster Näherung



$\rho_{22} = \langle a_2^+ a_2 \rangle$ Besetzungszahl in $|2\rangle$

$p_{21} = \langle a_2^+ a_1 \rangle$ / $p_{12} = \langle a_1^+ a_2 \rangle$ Übergangsamplitude $|2\rangle \to |1\rangle$

$\rho_{11} = \langle a_1^+ a_1 \rangle$ Besetzungszahl in $|1\rangle$

$n_{\lambda k} = \langle c_{\lambda k}^+ c_{\lambda k} \rangle$ Photonzahl

Kann man die Dynamik auf diese Größe reduzieren?

2.1. Rotating Wave Approximation / Drehwellennäherung

Idee: nichtresonante Terme in H weglassen

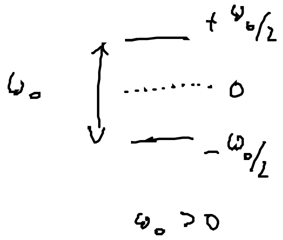
$$H_{el-ph} = -\sum_{\substack{\lambda k \\ n_1 n_2}} \hbar g^{k\lambda}_{n_1 n_2} a^+_{n_1} a_{n_2} c_{\lambda k} + \text{h.a.}$$

ZNS: $\{n_1, n_2\} = \{1, 2\}$ mit $g_{n_1 n_2} \neq 0$ nur für $n_1 \neq n_2$

$\Rightarrow$ 4 Terme in H_{el-ph}

Resonanzbedingung über freie Bewegung: $\dot{c}_{\lambda k} = -i\omega_{\lambda k} c_{\lambda k} \to c_{\lambda k} \approx c_{\lambda k}(0) e^{-i\omega_{\lambda k} t}$

$$c^+_{\lambda k} \approx c^+_{\lambda k}(0) e^{+i\omega_{\lambda k} t}$$



$$\begin{cases} \frac{d}{dt} a_1^+ a_2 = i(\omega_1 - \omega_2)\, a_1^+ a_2 \\ a_1^+ a_2 = a_1^+(0)\, a_2(0)\, e^{i(\omega_1-\omega_2)t} \end{cases}$$

$$\omega_1 - \omega_2 = -\frac{\omega_0}{2} - \frac{\omega_0}{2} = -\omega_0$$

jetzt nur Resonanzterme mitnehmen:

$$H_{el-ph} = -\sum_{\lambda k} \left(\hbar g^{k\lambda}_{12}\, a_1^+ a_2\, c^+_{\lambda k} + \hbar g^{k\lambda}_{21}\, a_2^+ a_1\, c_{\lambda k} \right)$$

Sind die resonanten Terme: $e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega_{\lambda k} t} \approx 1$

andere Terme: $e^{-i\omega_0 t} e^{-i\omega_{\lambda k} t} \approx e^{-i2\omega_0 t} \to 0$

$\Rightarrow$ RWA ist nur gut wenn man an Resonanzeffekten interessiert ist.

2.2. Observable d. Elektron-Photon Kopplung

Heisenberggleichung: $\dot{\underline{O}} = \frac{i}{\hbar}[\underline{H}, \underline{O}]$ f. Operatoren ohne explizite t-Abhängigkeit.

(i) Übergangsamplitude $a_1^+ a_2 = \underline{O}$

$$\frac{d}{dt}\left(a_1^\dagger a_2\right) = i(\omega_1-\omega_2)\, a_1^\dagger a_2 + \frac{i}{\hbar}\left[H_{el-ph}, a_1^\dagger a_2\right]$$

$$\frac{i}{\hbar}\left[H_{el-ph}, a_1^\dagger a_2\right] = -i\sum_{\lambda k} g^{k\lambda}_{21}\, c_{\lambda k}\, \underbrace{\left[a_2^\dagger a_1, a_1^\dagger a_2\right]}$$

$$\underbrace{a_2^\dagger a_1 a_1^\dagger a_2} - \cancel{a_1^\dagger a_2 a_2^\dagger} a_1$$

$$a_2^\dagger (1 - a_1^\dagger a_1)\, a_2$$

$$\underline{\underline{a_2^\dagger a_2}} - \underbrace{a_2^\dagger a_1^\dagger a_1 a_2}$$

$$a_1^\dagger a_2^\dagger a_2 a_1$$

$$a_1^\dagger(1 - \cancel{a_2 a_2^\dagger})\, a_1$$

$$\left(a_2^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_1\right)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} a_1^\dagger a_2 = i(\omega_1-\omega_2)\, a_1^\dagger a_2 - i\sum_{\lambda k} g^{k\lambda}_{21}\left(a_2^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_2\right) c_{\lambda k}}$$

freier Anteil WW-Anteil

$\exists$ Hierarchieproblem: System von Observablen ist nicht geschlossen

$$p_{12} \to \langle a_2^\dagger a_2 c_{\lambda k} \rangle$$

Später Abbruchbedingg. nach gesuchter Physik

(ii) Photonfeld $\quad c^\dagger_{\lambda k} \quad c_{\lambda k}$

$$\dot{c}_{\lambda k} = -i\,\omega_{\lambda k}\, c_{\lambda k} + i\, g^{k\lambda}_{12}\, a_1^\dagger a_2$$

$$\dot{c}^\dagger_{\lambda k} = +i\,\omega_{\lambda k}\, c^\dagger_{\lambda k} - i\, g^{k\lambda}_{21}\, a_2^\dagger a_1$$

mit Produktregel $\rightarrow$ Photonzahl $\quad \dot{n}_{\lambda k} = \frac{d}{dt}\left(c^\dagger_{\lambda k}\, c_{\lambda k}\right) = \dot{c}^\dagger_{\lambda k}\, c_{\lambda k} + c^\dagger_{\lambda k}\, \dot{c}_{\lambda k}$

$$\frac{d}{dt}\, c^\dagger_{\lambda k}\, c_{\lambda k} = i\left(g^{k\lambda}_{12} \cdot c^\dagger_{\lambda k}\, a_1^\dagger a_2 - g^{k\lambda}_{21}\, a_2^\dagger a_1\, c_{\lambda k}\right)$$

(iii) elektronische Besetzungszahlen

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\, a_1^\dagger a_1}_{\text{Besetzg.}} = \frac{i}{\hbar}\left[H_{el\text{-}ph},\, a_1^\dagger a_1\right] = -i\sum_{\lambda k} g^{k\lambda}_{21}\, \underbrace{c_{\lambda k}\, a_2^\dagger a_1}_{\text{photonassistierter Übergang}} + h.a.$$

Besetzg. $\longrightarrow$ physikalisch klar $\longleftarrow$ photonassistierter Übergang

$$\underline{\frac{d}{dt}\, a_2^\dagger a_2} = i\sum_{\lambda k} g^{k\lambda}_{21}\, c_{\lambda k}\, a_2^\dagger a_1 + h.a. = \underline{-\frac{d}{dt}\, a_1^\dagger a_1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2\right) = 0 \quad \hat{=} \text{ Wahrscheinlichkeitserhaltg.}$$

$$a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 = \underline{1}$$

El. muß sich auf $|1\rangle$ und $|2\rangle$ aufteilen ebenso: $\frac{d}{dt} \sum_{\lambda k} c^+_{\lambda k} c_{\lambda k} = -\frac{d}{dt} a^+_2 a_2$

$$\frac{d}{dt} \Bigg(\underbrace{\sum_{\lambda k} c^+_{\lambda k} c_{\lambda k} + a^+_2 a_2}_{} \Bigg) = 0$$

Konstant $\hat{=}$ Zahl der Anregg. im System (n_{ph} + El in $|2\rangle$)
Anfangsbeding. f. Photon legt diese Konstante fest

Erwartungswerte:

$$\dot{n}_{ph} = -\dot{f}_2 = \dot{f}_1$$

wir benötigen nur eine Gleichung um Gesamtsystem zu formulieren:
z.B $\dot{f}_2$ = bekannt $\rightarrow$ $\dot{n}_{ph}$, $\dot{f}_1$

2.3. Ableitg. der Ratengleichungen: Born-Markoffnäherung

$$\frac{d}{dt} \langle a^+_2 a_2 \rangle = i \sum_{\lambda k} g^{\lambda k}_{21} \underbrace{\langle c_{\lambda k} a^+_2 a_1 \rangle}_{} + h.a$$

problematisch: Hierarchieproblem

naiv: $\langle c_{\lambda k} \rangle \langle a^+_2 a_1 \rangle \longrightarrow$ klassische Blochgleichg.

müßte dann facherer Zustand sein
$\hookrightarrow$ klass. elektromagn. Feld $\rightarrow$ keine Quanteneffekte

1. Näherg: Feld hat verschwindenden EW

Idee:
Bewegungsgleichg. f. $c_{\lambda k} a^+_2 a_1$ aufschreiben und dann faktorisieren

$$\frac{d}{dt}\left(c_{\lambda k}\, a_2^+ a_1\right) = \left(\frac{d}{dt} c_{\lambda k}\right) a_2^+ a_1 + \underbrace{c_{\lambda k}\left(\frac{d}{dt} a_2^+ a_1\right)}_{\to \text{ von oben}}$$

nach Rechnung:

$$\frac{d}{dt}\left(g_{21}^{\lambda k}\, c_{\lambda k}\, a_2^+ a_1\right) = -i\left(\omega_{\lambda k} - \overset{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0}\right) g_{21}^{\lambda k}\, c_{\lambda k}\, P_{21} \qquad \text{freier Anteil}$$

$$\underbrace{+\, i\left|g_{12}^{\lambda k}\right|^2 a_1^+ a_2\, a_2^+ a_1 + i \sum_{\lambda' k'} g_{12}^{\lambda' k'} g_{21}^{\lambda k}\left(\delta_{kk'}^{\lambda\lambda'} + c_{\lambda' k'}^+ c_{\lambda k}\right) \Delta_{21} \quad \left[\text{mit } \Delta_{21} = \left(a_2^+ a_2 - a_1^+ a_2\right)\right]}_{\text{untere Zeile}}$$

Erwartungswerte nehmen:

$$\langle a_1^+ a_2\, a_2^+ a_1 \rangle = \langle a_1^+ \left(1 - a_2^+ \underline{a_2}\right) \underline{a_1} \rangle = \langle a_1^+ a_1 \rangle$$

Spur über Anfangszustände (Einelektronenzustände) $\qquad = f_1$

$$i \sum_{\lambda' k'} g_{12}^{\lambda' k'} g_{21}^{\lambda k}\left(\delta_{kk'}^{\lambda\lambda'} + c_{\lambda' k'}^+ c_{\lambda k}\right) \Delta_{21} =$$

$$i\,|g_{12}^{k\lambda}|^2\,(\underline{\underline{f_2}}-\underline{\underline{f_1}}) + \sum_{\lambda'k'} g_{12}^{k'\lambda'} g_{21}^{\lambda k}\cdot\underbrace{\langle c^+_{\lambda'k'}\,c_{\lambda k}\,\Delta_{21}\rangle}$$

Faktorisierung: $\langle c^+_{\lambda'k'}\,c_{\lambda k}\rangle\langle\Delta_{21}\rangle$

in Mittelwerte: $\delta^{\lambda'\lambda}_{k'k}\;u_{\lambda k}\;(f_2-f_1)$

räumlich homogene Situation

2. Näherung: Bornsche Näherung zweiter Ordnung (g^2)

$$\frac{d}{dt}\,g_{21}^{\lambda k}\langle c_{\lambda k}\,P_{21}\rangle = -i\,(\omega_{\lambda k}-\omega_0)\,g_{21}^{\lambda k}\langle c_{\lambda k}\,P_{21}\rangle \quad \text{freie Beweg.}$$

$$+\,i\,|g_{12}^{\lambda k}|^2\left(f_2+[f_2-f_1]\,u_{\lambda k}\right) \quad \text{Wechselwirkg.}$$

geschlossenes System in $f_2, f_1, u_{\lambda k}$ und $\langle c_{\lambda k}\,P_{21}\rangle$

Diffgleichung 1. Ordnung f. $\langle c_{\lambda k}\,P_{21}\rangle$:

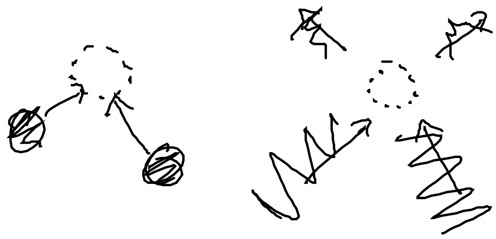
$$g_{21}^{\lambda k}\langle c_{\lambda k}\,P_{21}\rangle(t) = i\,|g_{12}^{\lambda k}|^2\int_{-\infty}^{t} dt'\,e^{-i(\omega_k-\omega_0)(t-t')}\,F(t')$$

$$F(t') = f_2(t') + [\,f_2(t')-f_1(t')\,]\,u_{\lambda k}(t')$$

einsetzen in $\dot{f}_2$:

$$\dot{f}_2(t) = -2\sum_{1k} |g_{12}^{1k}|^2 \,\mathrm{Re} \underbrace{\int_{-\infty}^{t} dt' \, e^{-i(\omega_{1k}-\omega_0)(t-t')} F(t')}_{\text{Gedächtniseffekt: } f_2(t) \sim f_2(t'),\; t'<t}$$

ist in QM erklärt daß Teilchen sich beim Stoß auf kurzen Zeiten wie Wellen verhalten:

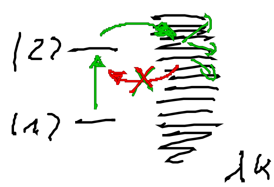


Theorien die aus QM abgeleitet werden können nach Zeitskalen klassifiziert werden:

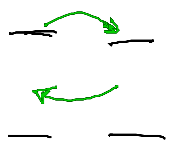
auf Stoßzeitskala beobachten $\rightarrow$ QM

auf grobkörnigen Skalen beobachten $\rightarrow$ Kinetik, Hydrodynamik

Wann kann man Zeit grobkörnig machen?



Anregg. wird abgegeben
Umgebg.: wenn
Umgebg viele Freiheitsgrad
hat, so „verschwindet" die



ZNS Strahlungsfeld Quantenkohärenz $\rightarrow$ Zeitrichtg.

Gedächtniseffekte nicht wichtig wenn viele Freiheitsgrade der Umgebung ∃

⇐ X ≙ mehrfaches Weltalter

mathematisch: λk: viele Freiheitsgrade

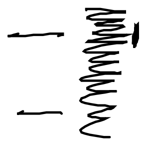
$$\sum_{\lambda k} \int_{-\infty}^{t} dt\; e^{-i(\omega_{\lambda k}-\omega_0)(t-t')} \; F(t')$$

$$\downarrow$$

$$F_k(t')$$

$\sum_{\lambda k}$ ist einfach wenn Resonanz möglich macht:

alle k im Integral setzt man $k \to k_0$ mit $ck_0 = \omega_0$



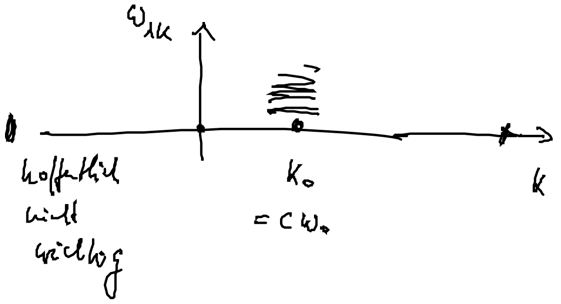
$$e^{i\omega_{\lambda k}t} = e^{ickt}$$

wird stehengelassen (oszilliert stark)

Markoff approximation weil diese t' eliminiert.

$$\sum_{\lambda k} \to \frac{V}{(2\pi)^3} \underbrace{\int d\Omega}_{\text{Viele}} \int_0^\infty dk\, k_0^2 \;\longrightarrow\; \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, k_0$$

↗ weil das verschwindenden Beitrag macht



$\int d\Omega \;\hat{=}\;$ Winkelmittlg. ϑ, φ bzgl. $\vec{e}_{\lambda k} \cdot \vec{d}_{12}$ (Übung)

$$\dot{f}_2(t) = -2\frac{V}{(2\pi)^3} \underbrace{\int d\Omega \left| g_{12}^{\lambda k_0} \right|^2}_{\frac{8\pi}{3}|\vec{d}_{12}|} \cdot \frac{2\pi}{c} k_0^2 \int_{-\infty}^{t} dt' \, \delta(t-t') e^{i\omega_0(t-t')} F(t')$$

mit $\int_{-\infty}^{+\infty} dk \, e^{ikc(t-t')} \longrightarrow \frac{2\pi}{c} \delta(t-t')$ $\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \, \theta(t-t')$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{f}_2(t) &= -\Gamma f_2(t) - \Gamma \left(f_2(t) - f_1(t) \right) n_0(t) \\ \dot{n}_0(t) &= \Gamma f_2(t) + \Gamma \left(f_2(t) - f_1(t) \right) n_0(t) \end{aligned}}$$

- Photonratengleichg. f. ZNS für Besetzungsdichte f_2, $1 = f_1 + f_2$ und die Photonzahl n_0 mit der Energie $\hbar\omega_0$ d. ZNS.

- 2 geschlossene Dgl., lösbar, wenn auch nicht einfach

- Γ ist Rate mit der die Dynamik stattfindet:

$$\Gamma = \left(\frac{\omega_0}{c}\right)^3 \frac{|d_{12}|^2}{\hbar \varepsilon_0 3\pi} \sim \omega_0^3 |d_{12}|^2$$

(Einsteinkoeffizient)

- Gleichungen enthält spontane Prozesse: $n_0 = 0$
  stimulierte Prozesse: $n_0 \neq 0$

– weitere Prozesse: Verluste und externes Pumpen