b) Charakt. Funktion und Kumulanten

$$G(k) = \int dx\, e^{-ikx} P(x) = \langle e^{-ikx} \rangle \qquad (3.13)$$

$\longrightarrow$ erzeugende Funktion für Kumulanten:

$$\boxed{\ln G(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle_c \longleftrightarrow \langle x^n \rangle_c = \frac{\partial^n}{\partial(-ik)^n} \ln G(k) \Big|_{k=0}} \qquad (3.16)$$

$\longrightarrow$

$$\langle x \rangle_c = \langle x \rangle$$
$$\langle x^2 \rangle_c = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \Delta x^2$$
$$\langle x^3 \rangle_c = \langle x^3 \rangle - 3 \langle x^2 \rangle \langle x \rangle + 2 \langle x \rangle^3 = \langle (x - \langle x \rangle)^3 \rangle$$
$$\vdots$$

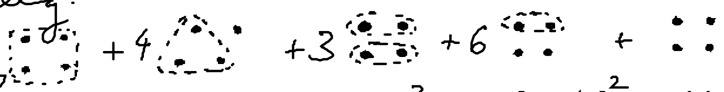
... „wesentliche Momente" von $P(x)$, n Punkt-Korrelationen

- Umkehrung:

$$\boxed{\begin{aligned}
\langle x \rangle &= \langle x \rangle_c \\
\langle x^2 \rangle &= \langle x^2 \rangle_c + \langle x \rangle_c^2 \\
\langle x^3 \rangle &= \langle x^3 \rangle_c + 3 \langle x^2 \rangle_c \langle x \rangle_c + \langle x \rangle_c^3 \\
\langle x^4 \rangle &= \langle x^4 \rangle_c + 4 \langle x^3 \rangle_c \langle x \rangle_c + 3 \langle x^2 \rangle_c^2 + 6 \langle x^2 \rangle_c \langle x \rangle_c^2 + \langle x \rangle_c^4
\end{aligned}} \qquad (3.18)$$

Anzahl der verschiedenen Kombinationen aus 3 Elementen: $\binom{3}{2} = 3$

- graphische Darstellung:

Bsp: $\langle x^4 \rangle =$ 

$\langle x^4 \rangle_c \qquad \langle x^3 \rangle_c \langle x \rangle_c \qquad \langle x^2 \rangle_c^2 \qquad \langle x^2 \rangle_c \langle x \rangle_c^2 \qquad \langle x \rangle_c^4$

Cluster $\hat{=} \langle \ldots \rangle_c$

- allgemein: [ohne Beweis]

$$\boxed{\langle x^m \rangle = \sum_{\{p_n\}}{}' \; m! \prod_n \frac{1}{p_n! (n!)^{p_n}} \langle x^n \rangle_c^{p_n}} \qquad (3.18a)$$

p_n ... Anzahl der Cluster mit Ordnung n

$\sum'_{\{p_n\}}$ ... über alle Cluster-Gruppen $\{p_n\}$ mit $\sum n\, p_n = m$ (Ordnung, Anzahl)

$\prod_n \frac{m!}{p_n! (n!)^{p_n}}$ ... mögliche Realisierungen der Clustergruppe $\{p_n\}$

• **Bsp:** Gaußsche Verteilung: (3.12) $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$

(i) $G(k) = \exp\left[-\frac{k^2\sigma^2}{2} - i k x_0\right]$ (3.19)

(ii) $\ln G(k) = -i k x_0 - \frac{k^2\sigma^2}{2} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned}\langle x\rangle_c &= x_0 \\ \langle x^2\rangle_c &= \sigma^2\end{aligned}}$ (3.20)

$\langle x^3\rangle_c = \langle x^4\rangle_c = \ldots = 0!$

3.3 Beispiele

a) **Diskrete Verteilungen:**

(i) **Binomial-Verteilung**

• **Geg:** Einzelexperiment mit 2 Ausgängen (ja, nein für spezielles Ereignis)

also: $x = A, B$ mit $p(A) = p$
$p(B) = q = 1-p$

Ges: Wahrscheinlichkeit für N_A Ausgänge A bei N Einzelexperimenten

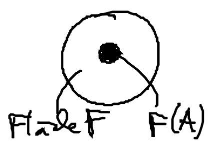
$$\boxed{P_N(N_A) = \binom{N}{N_A} p^{N_A} q^{N-N_A}} \quad (3.21)$$

$\binom{N}{N_A} = \frac{N!}{N_A!\,(N-N_A)!}$ … Binomialkoeffizient

• **Bsp:** (1) Würfel: A … werfe 6, $p(A) = p = \frac{1}{6}$
B … " keine 6, $p(B) = q = \frac{5}{6}$

(2) Münze: A … Kopf, B … Zahl

(3) Dart „ohne Geschicklichkeit"



A … treffe ●, $p(A) = \frac{F(A)}{F}$
B … treffe Rest, $p(B) = 1 - p(A)$

• charakt. Funktion:

$G_N(k) = \langle e^{-ikN_A}\rangle = (p e^{-ik} + q)^N$

$\sum_{N_A} e^{-ikN_A} P_N(N_A) = \sum_{N_A} \binom{N}{N_A} (p e^{-ik})^{N_A} q^{N-N_A}$

$$\longrightarrow \quad \langle N_A \rangle = \langle N_A \rangle_c = Np$$
$$\langle N_A^2 \rangle_c = (\Delta N_A)^2 = Npq$$

Beweis:

1. $\ln G_N(k) = N \underbrace{\ln(pe^{-ik}+q)}_{\ln G_1(k):\ \text{für ein Versuch}}$ $\Big\}$ Kumulanten für N Versuche = N × Kumulanten für 1 Versuch

2. Kumulanten:

ein Versuch: Momente $\langle N_A^n \rangle \overset{N_A = 0,1}{=} 1^n p + 0^n q = p$

N Versuche: $\langle N_A \rangle = \langle N_A \rangle_c = Np$

$$\langle N_A^2 \rangle_c = (\Delta N_A)^2 \underset{\langle N_A^2 \rangle - \langle N_A \rangle^2}{=} N(\overbrace{p-p^2}^{p(1-p)}) = Npq$$

1 Teilchen Versuch

$$\longrightarrow \quad \frac{\Delta N_A}{N} = \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{N}} \quad !$$

Mittelwert immer schärfer für $N \to \infty$

- Grenzfall $N \to \infty$:

$P_N(N_A) \xrightarrow{\text{zentraler Grenzwertsatz}}$ Gaußsche Verteilung (s. Kap. 3.5)

(ii) Poisson-Verteilung

- Geg.: Voneinander unabhängige, „seltene" Einzelereignisse in festem Bereich (Zeit, Strecke, Fläche, ...), die mit gleicher Wahrscheinlichkeit vorkommen.

Ges: Wahrscheinlichkeit $P(x)$ für x Einzelereignisse mit $\langle x \rangle = \lambda$:

$$\xrightarrow{\text{z.B.}} \quad \boxed{P_\lambda(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}}, \quad x = 0,1,2,\ldots \qquad (3.22)$$

- **Bsp:** (1) radioaktiver Zerfall in Zeit T

Anzahl der mittleren Zerfälle: $\lambda = \alpha T$, α … Zerfallsrate

$\alpha \Delta t$ … Wahrscheinlichkeit, daß Atom in Zeit Δt zerfällt ($\Delta t \ll \alpha^{-1}$)

$$\longrightarrow p_T(x) = \frac{(\alpha T)^x e^{-\alpha T}}{x!}$$

… Wahrscheinlichkeit für x Zerfälle in T

(2) Dart mit $\underbrace{F(A) \ll F}_{\text{Treffer ist seltenes Ereignis}}$ (s.u. für Verbindung zu Binomialverteilung)

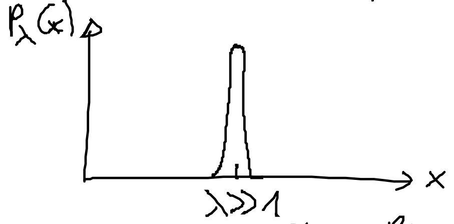
- charakt. Funktion: x … diskret

$$G(k) = \langle e^{-ikx} \rangle \underset{\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x!} (\lambda e^{-ik})^x e^{-\lambda}}{=} \exp[\lambda (e^{-ik} - 1)] \qquad (3.23)$$

$$\longrightarrow \ln G(k) = \lambda (e^{-ik} - 1) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \qquad (3.24)$$

$$\xrightarrow{(3.16)} \boxed{\text{Kumulanten: } \langle x^n \rangle_c = \lambda} \qquad (3.25)$$

insbesondere: $\frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{\sqrt{\langle x^2 \rangle_c}}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$



- Herleitung von $P_\lambda(x)$ als Grenzfall der Binomialverteilung (3.21):

$p \to 0$ („seltenes Ereignis")
$N \to \infty$

so daß $\langle N_A \rangle = Np = \lambda = $ konst.

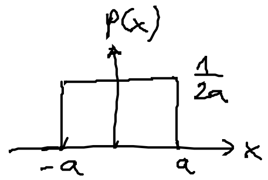
$$\boxed{P_N(N_A) \longrightarrow P_\lambda(N_A) = \frac{\lambda^{N_A} e^{-\lambda}}{N_A!}} \qquad (3.26)$$

Beweis: Übung!

b) Kontinuierliche Verteilungen

(i) homogene Verteilung

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \qquad (3.27)$$



- Momente:
$$\langle x^n \rangle = \begin{cases} \frac{1}{a(n+1)} a^{n+1} & , n \text{ grade} \\ 0 & , n \text{ ungerade} \end{cases}$$

- charakt. Funktion:
$$G(k) = \langle e^{-ikx} \rangle = \frac{\sin ka}{ka} \quad , \quad G(0) = 1 \text{ ... Normierung!}$$

- Kumulanten ?

(ii) <u>Normal / Gaußsche Verteilung</u>

s.o.

(iii) <u>Exponentielle Verteilung</u>
$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases} \qquad (3.28)$$

Momente, charakt. Fkt., Kumulanten (s. Übung)

3.4 <u>Mehrdimensionale Verteilung</u>